CAML

3 - Récursivité

http://tsi.tuxfamily.org/OCaml

13 février 2023

Exercice

Que fait le processus $\bigstar$ défini par les règles :

$$A \bigstar \; |B \longrightarrow |A \bigstar \; B$$

$$A \bigstar \; \longrightarrow A$$

où A et B représentent des motifs quelconques, et $|$ une unité (par exemple $5 = |||||$)

Exercice

Que fait le processus $\bigstar$ défini par les règles :

$$\mathcal{R}_1 : A \bigstar |B \longrightarrow |A \bigstar B$$

$$\mathcal{R}_2 : A \bigstar \longrightarrow A$$

où A et B représentent des motifs quelconques, et $|$ une unité (par exemple $5 = |||||$)

Exercice

Que fait le processus ★ défini par les règles :

$$\mathcal{R}_1 : A \bigstar |B \longrightarrow |A \bigstar B$$

$$\mathcal{R}_2 : A \bigstar \longrightarrow A$$

où A et B représentent des motifs quelconques, et $|$ une unité (par exemple $5 = |||||$)

$$||| \bigstar ||$$

Exercice

Que fait le processus $\bigstar$ défini par les règles :

$$\mathcal{R}_1 : A \bigstar |B \longrightarrow |A \bigstar B$$

$$\mathcal{R}_2 : A \bigstar \longrightarrow A$$

où A et B représentent des motifs quelconques, et $|$ une unité (par exemple $5 = |||||$)

$$||| \bigstar || \xrightarrow{\mathcal{R}_1} |||| \bigstar |$$

Exercice

Que fait le processus $\bigstar$ défini par les règles :

$$\mathcal{R}_1 : A \bigstar |B \longrightarrow |A \bigstar B$$

$$\mathcal{R}_2 : A \bigstar \longrightarrow A$$

où A et B représentent des motifs quelconques, et $|$ une unité (par exemple $5 = |||||$)

$$||| \bigstar || \xrightarrow{\mathcal{R}_1} |||| \bigstar | \xrightarrow{\mathcal{R}_1} ||||| \bigstar$$

Exercice

Que fait le processus $\bigstar$ défini par les règles :

$$\mathcal{R}_1 : A \bigstar |B \longrightarrow |A \bigstar B$$

$$\mathcal{R}_2 : A \bigstar \ \longrightarrow A$$

où A et B représentent des motifs quelconques, et $|$ une unité (par exemple $5 = |||||$)

$$||| \bigstar || \xrightarrow{\mathcal{R}_1} |||| \bigstar | \xrightarrow{\mathcal{R}_1} ||||| \bigstar \ \xrightarrow{\mathcal{R}_2} |||||$$

Exercice

Que fait le processus $\bigstar$ défini par les règles :

$$\mathcal{R}_1 : A \bigstar |B \longrightarrow |A \bigstar B$$

$$\mathcal{R}_2 : A \bigstar \longrightarrow A$$

où A et B représentent des motifs quelconques, et $|$ une unité (par exemple $5 = |||||$)

$$||| \bigstar || \xrightarrow{\mathcal{R}_1} |||| \bigstar | \xrightarrow{\mathcal{R}_1} ||||| \bigstar \xrightarrow{\mathcal{R}_2} |||||$$

On vient de définir l'addition !

Exercice

$$A \star |B \longrightarrow |A \star B$$

$$A \star \longrightarrow A$$

où A et B représentent des motifs quelconques, et $|$ une unité (par exemple $5 = |||||$)

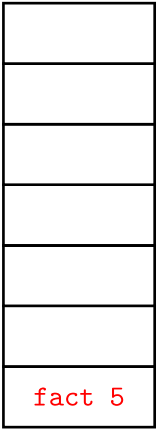
```
let rec etoile a = function
        | 0 -> a
        | b -> etoile (1+a) (b-1)
;;
```

Déclaration de la fonction factorielle, basée sur le fait que

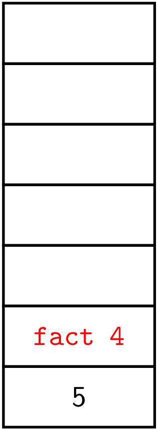
$$\begin{cases} 0! = 1 \\ n! = n \times (n-1)! \text{ si } n > 0 \end{cases}$$

```
let rec fact = function
        |0  -> 1
        |n  -> n*fact (n-1)
;;
```

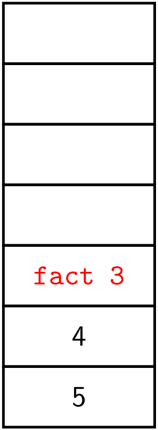
- Empilement des données.



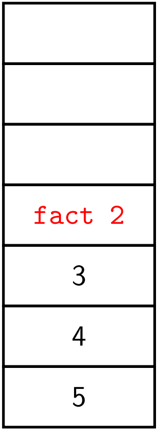
- Empilement des données.
  - `fact` 5 $=$ 5$\times$ `fact` 4



- Empilement des données.
  - `fact` $5 = 5\times$ `fact` 4
  - `fact` $5 = 5 \times 4\times$ `fact` 3



- Empilement des données.
  - `fact` $5 = 5\times$ `fact` 4
  - `fact` $5 = 5 \times 4\times$ `fact` 3
  - `fact` $5 = 5 \times 4 \times 3\times$ `fact` 2



- Empilement des données.
  - `fact` $5 = 5\times$ `fact` 4
  - `fact` $5 = 5 \times 4\times$ `fact` 3
  - `fact` $5 = 5 \times 4 \times 3\times$ `fact` 2
  - `fact` $5 = 5 \times 4 \times 3 \times 2\times$ `fact` 1

`fact 1`
2
3
4
5

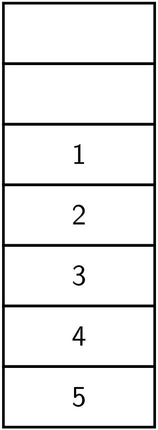
- Empilement des données.
  - $\texttt{fact}\ 5 = 5 \times\ \texttt{fact}\ 4$
  - $\texttt{fact}\ 5 = 5 \times 4 \times\ \texttt{fact}\ 3$
  - $\texttt{fact}\ 5 = 5 \times 4 \times 3 \times\ \texttt{fact}\ 2$
  - $\texttt{fact}\ 5 = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times\ \texttt{fact}\ 1$
  - $\texttt{fact}\ 5 = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 \times\ \texttt{fact}\ 0$

`fact 0`
1
2
3
4
5

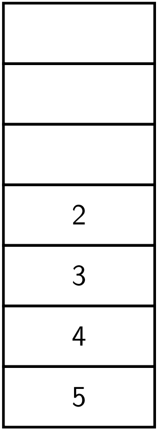
- Empilement des données.
  - `fact 5` $= 5\times$ `fact 4`
  - `fact 5` $= 5 \times 4\times$ `fact 3`
  - `fact 5` $= 5 \times 4 \times 3\times$ `fact 2`
  - `fact 5` $= 5 \times 4 \times 3 \times 2\times$ `fact 1`
  - `fact 5` $= 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1\times$ `fact 0`
  - `fact 5` $= 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1\times\mathbf{1}$.

1
1
2
3
4
5

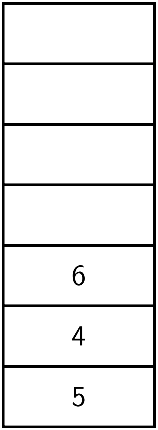
- Empilement des données.
  - $\texttt{fact 5} = 5\times$ $\texttt{fact 4}$
  - $\texttt{fact 5} = 5\times 4\times$ $\texttt{fact 3}$
  - $\texttt{fact 5} = 5\times 4\times 3\times$ $\texttt{fact 2}$
  - $\texttt{fact 5} = 5\times 4\times 3\times 2\times$ $\texttt{fact 1}$
  - $\texttt{fact 5} = 5\times 4\times 3\times 2\times 1\times$ $\texttt{fact 0}$
  - $\texttt{fact 5} = 5\times 4\times 3\times 2\times 1\times\mathbf{1}$.
- Dépilement des données.
  - $\texttt{fact 5} = 5\times 4\times 3\times 2\times\mathbf{1}$.



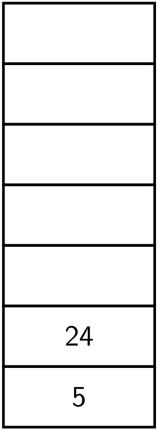
- Empilement des données.
  - `fact` $5 = 5\times$ `fact` 4
  - `fact` $5 = 5 \times 4\times$ `fact` 3
  - `fact` $5 = 5 \times 4 \times 3\times$ `fact` 2
  - `fact` $5 = 5 \times 4 \times 3 \times 2\times$ `fact` 1
  - `fact` $5 = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1\times$ `fact` 0
  - `fact` $5 = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1\times\mathbf{1}$.
- Dépilement des données.
  - `fact` $5 = 5 \times 4 \times 3 \times 2\times\mathbf{1}$.
  - `fact` $5 = 5 \times 4 \times 3\times\mathbf{2}$.



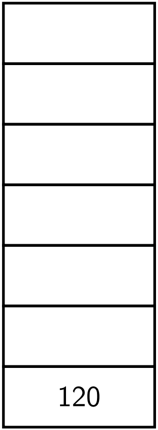
- Empilement des données.
  - `fact` $5 = 5\times$ `fact` 4
  - `fact` $5 = 5 \times 4\times$ `fact` 3
  - `fact` $5 = 5 \times 4 \times 3\times$ `fact` 2
  - `fact` $5 = 5 \times 4 \times 3 \times 2\times$ `fact` 1
  - `fact` $5 = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1\times$ `fact` 0
  - `fact` $5 = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1\times\mathbf{1}.$
- Dépilement des données.
  - `fact` $5 = 5 \times 4 \times 3 \times 2\times\mathbf{1}.$
  - `fact` $5 = 5 \times 4 \times 3\times\mathbf{2}.$
  - `fact` $5 = 5 \times 4\times\mathbf{6}.$



- Empilement des données.
  - $\texttt{fact } 5 = 5\times \texttt{ fact } 4$
  - $\texttt{fact } 5 = 5 \times 4\times \texttt{ fact } 3$
  - $\texttt{fact } 5 = 5 \times 4 \times 3\times \texttt{ fact } 2$
  - $\texttt{fact } 5 = 5 \times 4 \times 3 \times 2\times \texttt{ fact } 1$
  - $\texttt{fact } 5 = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1\times \texttt{ fact } 0$
  - $\texttt{fact } 5 = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1\times\mathbf{1}$.
- Dépilement des données.
  - $\texttt{fact } 5 = 5 \times 4 \times 3 \times 2\times\mathbf{1}$.
  - $\texttt{fact } 5 = 5 \times 4 \times 3\times\mathbf{2}$.
  - $\texttt{fact } 5 = 5 \times 4\times\mathbf{6}$.
  - $\texttt{fact } 5 = 5\times\mathbf{24}$.



- Empilement des données.
  - fact 5 $=$ 5$\times$ fact 4
  - fact 5 $=$ $5 \times 4\times$ fact 3
  - fact 5 $=$ $5 \times 4 \times 3\times$ fact 2
  - fact 5 $=$ $5 \times 4 \times 3 \times 2\times$ fact 1
  - fact 5 $=$ $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1\times$ fact 0
  - fact 5 $=$ $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1\times\mathbf{1}$.
- Dépilement des données.
  - fact 5 $=$ $5 \times 4 \times 3 \times 2\times\mathbf{1}$.
  - fact 5 $=$ $5 \times 4 \times 3\times\mathbf{2}$.
  - fact 5 $=$ $5 \times 4\times\mathbf{6}$.
  - fact 5 $=$ $5\times\mathbf{24}$.
  - fact 5 $=$ $\mathbf{120}$.



```
let rec fact = function
  |0 -> 1
  |n -> n*fact (n-1)
;;

#trace fact;;

fact 5;;

#untrace fact;;

fact 5;;
```

```
# #trace fact;;
fact is now traced.
# fact 5;;
fact <-- 5
fact <-- 4
fact <-- 3
fact <-- 2
fact <-- 1
fact <-- 0
fact --> 1
fact --> 1
fact --> 2
fact --> 6
fact --> 24
fact --> 120
- : int = 120
# #untrace fact;;
fact is no longer traced.
# fact 5;;
- : int = 120
```

Pourquoi cet exemple n'est pas forcément pertinent ?

```
let rec fact = function
        |0 -> 1
        |n -> n*fact (n-1)
;;
```

Par rapport à la version impérative :

- Coût en temps ?

Pourquoi cet exemple n'est pas forcément pertinent ?

```
let rec fact = function
        |0 -> 1
        |n -> n*fact (n-1)
;;
```

Par rapport à la version impérative :

- Coût en temps ?
- Coût en mémoire ?

Pourquoi cet exemple n'est pas forcément pertinent ?

```
let rec fact = function
        |0 -> 1
        |n -> n*fact (n-1)
;;
```

Par rapport à la version impérative :

- Coût en temps ?
- Coût en mémoire ?
- Une version en temps constant ?

Pourquoi cet exemple n'est pas forcément pertinent ?

```
let rec fact = function
        |0 -> 1
        |n -> n*fact (n-1)
;;
```

Par rapport à la version impérative :

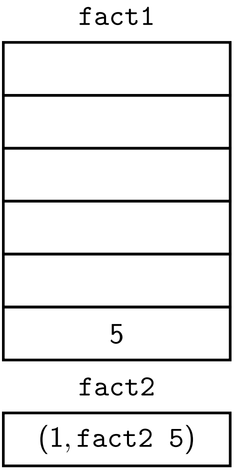
- Coût en temps ?
- Coût en mémoire ?
- Une version en temps constant ?

```
let fact n =
  let t  =[1;1;2;6;24;120;720;5040;40320;362880;
  3628800; ..... ;2432902008176640000|] in t.(n)
;;
```

Quelle est la différence entre ces 2 programmes ?

```
let rec fact1 = function
  |0 -> 1
  |n -> n*fact1 (n-1)
in fact1 5
;;
```

```
let rec fact2 c = function
  |0 -> c
  |n -> fact2 (c*n) (n-1)
in fact2 1 5
;;
```



Quelle est la différence entre ces 2 programmes ?

```
let rec fact1 = function
  |0 -> 1
  |n -> n*fact1 (n-1)
in fact1 5
;;
```

```
let rec fact2 c = function
  |0 -> c
  |n -> fact2 (c*n) (n-1)
in fact2 1 5
;;
```

Quelle est la différence entre ces 2 programmes ?

```
let rec fact1 = function
  |0 -> 1
  |n -> n*fact1 (n-1)
in fact1 5
;;
```

```
let rec fact2 c = function
  |0 -> c
  |n -> fact2 (c*n) (n-1)
in fact2 1 5
;;
```

`fact1`

3
4
5

`fact2`

(20, `fact2 3`)

Quelle est la différence entre ces 2 programmes ?

```
let rec fact1 = function
   |0 -> 1
   |n -> n*fact1 (n-1)
in fact1 5
;;
```

```
let rec fact2 c = function
   |0 -> c
   |n -> fact2 (c*n) (n-1)
in fact2 1 5
;;
```

`fact1`

2
3
4
5

`fact2`

(60, `fact2 2`)

Quelle est la différence entre ces 2 programmes ?

```
let rec fact1 = function
   |0 -> 1
   |n -> n*fact1 (n-1)
in fact1 5
;;
```

```
let rec fact2 c = function
   |0 -> c
   |n -> fact2 (c*n) (n-1)
in fact2 1 5
;;
```

`fact1`

1
2
3
4
5

`fact2`

(120, `fact2 1`)

Quelle est la différence entre ces 2 programmes ?

```
let rec fact1 = function
  |0 -> 1
  |n -> n*fact1 (n-1)
in fact1 5
;;
```

```
let rec fact2 c = function
  |0 -> c
  |n -> fact2 (c*n) (n-1)
in fact2 1 5
;;
```

fact1

1
1
2
3
4
5

fact2

(120, fact2 0)

Quelle est la différence entre ces 2 programmes ?

```
let rec fact1 = function
  |0 -> 1
  |n -> n*fact1 (n-1)
in fact1 5
;;
```

```
let rec fact2 c = function
  |0 -> c
  |n -> fact2 (c*n) (n-1)
in fact2 1 5
;;
```

fact1

1
2
3
4
5

fact2

$\rightarrow$ 120

Quelle est la différence entre ces 2 programmes ?

```
let rec fact1 = function
  |0 -> 1
  |n -> n*fact1 (n-1)
in fact1 5
;;
```

```
let rec fact2 c = function
  |0 -> c
  |n -> fact2 (c*n) (n-1)
in fact2 1 5
;;
```

`fact1`

2
3
4
5

`fact2`

$\rightarrow$ 120

Quelle est la différence entre ces 2 programmes ?

```
let rec fact1 = function
   |0 -> 1
   |n -> n*fact1 (n-1)
in fact1 5
;;
```

```
let rec fact2 c = function
   |0 -> c
   |n -> fact2 (c*n) (n-1)
in fact2 1 5
;;
```

`fact1`

6
4
5

`fact2`

$\rightarrow$ 120

Quelle est la différence entre ces 2 programmes ?

```
let rec fact1 = function
   |0 -> 1
   |n -> n*fact1 (n-1)
in fact1 5
;;
```

```
let rec fact2 c = function
   |0 -> c
   |n -> fact2 (c*n) (n-1)
in fact2 1 5
;;
```

`fact1`

24
5

`fact2`

$\rightarrow$ 120

Quelle est la différence entre ces 2 programmes ?

```
let rec fact1 = function
  |0 -> 1
  |n -> n*fact1 (n-1)
in fact1 5
;;
```

```
let rec fact2 c = function
  |0 -> c
  |n -> fact2 (c*n) (n-1)
in fact2 1 5
;;
```

fact1

$\rightarrow$ 120

fact2

$\rightarrow$ 120

Quelle est la différence entre ces 2 programmes ?

```
let rec fact1 = function
   |0 -> 1
   |n -> n*fact1 (n-1)
;;
```

```
let rec fact2 c = function
   |0 -> c
   |n -> fact2 (c*n) (n-1)
;;
```

Vocabulaire

La fonction `fact2` est dite **récursive terminale**, la fonction `fact1` est dite **récursive non terminale**

$$f(x) = \text{ si } R(x) \text{ alors } g(x) \text{ sinon } h(x, f(k(x)))$$

est la définition d'une fonction **récursive non terminale** : si la condition $R(x)$ est remplie, alors le calcul se termine avec l'évaluation de la fonction g. Dans le cas contraire, on effectue un appel récursif à f qui, lorsqu'il sera terminé, n'achèvera pas le calcul car il faudra encore évaluer $h(x, \ldots)$. Chaque appel à f est associé à une zone en mémoire où l'ensemble du contexte (à savoir les paramètres qui ont été passés à f ainsi que l'endroit où l'appel s'est interrompu) est conservé : chacun des appels récursifs peut ainsi se terminer.

$$f(x) = \text{ si } R(x) \text{ alors } g(x) \text{ sinon } f(k(x))$$

est la définition d'une fonction **récursive terminale**. Lorsque l'appel $f(k(x))$ se termine, alors l'appel précédent se termine aussi.

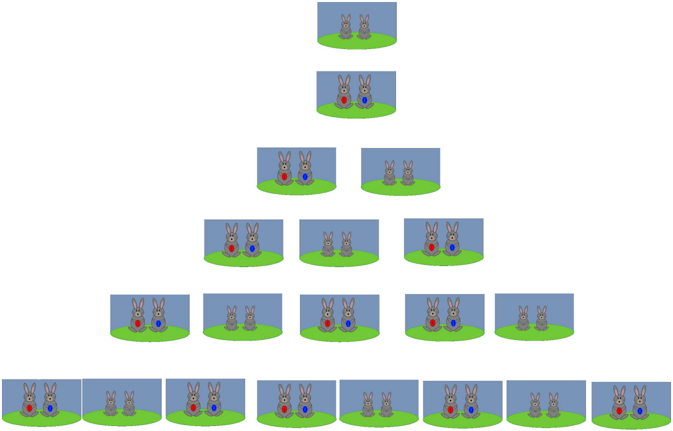
```
let rec fact2 c = function
   |0 -> c
   |n -> fact2 (c*n) (n-1)
;;
```

L'inconvénient avec `fact2` c'est que pour avoir $n!$, on doit faire l'appel avec `fact2 1 n`. On procède alors comme ceci à l'aide d'une fonction auxiliaire :

```
let fact2 n =
        let rec factR c = function
                |0 -> c
                |n -> factR (c*n) (n-1)
        in factR 1 n;;
```

Lorsque le compilateur la gère, la programmation d'une fonction récursive terminale a principalement pour objectif de limiter la complexité spatiale d'une fonction

Dans notre exemple, en réalité ces différents algorithmes sont à peu près aussi efficaces puisque avec la limitation sur les entiers, 21! dépasse les limites et affiche un résultat négatif.



$$F_0 = F_1 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*, F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$$

Exercice

Écrire un programme récursif naïf utilisant simplement la définition qui calcule le $n^{\text{ème}}$ terme.

```
let rec fibo = function
  | 0 | 1 -> 1
  | n -> fibo(n-1) + fibo(n-2)
;;
```

```
let rec fibo = function
  | 0 | 1 -> 1
  | n -> fibo(n-1) + fibo(n-2)
;;
```

Exercice

Que dire de ce programme ? Donner un équivalent du nombre d'appels nécessaires à calculer `fibo n` lorsque n est très grand.

Aide : Noter C_n le nombre d'appels à la fonction `fibo` à réaliser pour calculer F_n et trouver une relation de récurrence entre C_{n+1} et C_n...

```
let rec fibo = function
  | 0 | 1 -> 1
  | n -> fibo (n-1) + fibo(n-2)
;;
```

Notons C_n le nombre d'appels à réaliser pour calculer F_n.

```
let rec fibo = function
  | 0 | 1 -> 1
  | n -> fibo (n-1) + fibo(n-2)
;;
```

Notons C_n le nombre d'appels à réaliser pour calculer F_n.

- $C_0 = C_1 = 1$
- Dans les autres cas, $C_{n+1} = 1 + C_n + C_{n-1}$

```
let rec fibo = function
  | 0 | 1 -> 1
  | n -> fibo (n-1) + fibo(n-2)
;;
```

Notons C_n le nombre d'appels à réaliser pour calculer F_n.

- $C_0 = C_1 = 1$
- Dans les autres cas, $C_{n+1} = 1 + C_n + C_{n-1}{}^{(\star)}$

$^{(\star)}$ peut s'écrire $C_{n+1} + 1 = C_n + 1 + C_{n-1} + 1$

```
let rec fibo = function
  | 0 | 1 -> 1
  | n -> fibo (n-1) + fibo(n-2)
;;
```

Notons C_n le nombre d'appels à réaliser pour calculer F_n.

- $C_0 = C_1 = 1$
- Dans les autres cas, $C_{n+1} = 1 + C_n + C_{n-1}$ $^{(\star)}$

$^{(\star)}$ peut s'écrire $C_{n+1} + 1 = C_n + 1 + C_{n-1} + 1$
En posant $u_n = C_n + 1$, on obtient

$$\begin{cases} u_0 = u_1 = 2 \\ u_{n+1} = u_n + u_{n-1} \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

avec $u_n = C_n + 1$, $\begin{cases} u_0 = u_1 = 2 \\ u_{n+1} = u_n + u_{n-1} \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$

Il s'agit d'une suite linéaire récurrente d'ordre 2, que l'on sait résoudre....

avec $u_n = C_n + 1$, $\begin{cases} u_0 = u_1 = 2 \\ u_{n+1} = u_n + u_{n-1} \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$

$$u_n = \frac{5-\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{5+\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

avec $u_n = C_n + 1$, $\begin{cases} u_0 = u_1 = 2 \\ u_{n+1} = u_n + u_{n-1} \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$

$$u_n = \frac{5-\sqrt{5}}{5} \underbrace{\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}_{\approx -0{,}6} + \frac{5+\sqrt{5}}{5} \underbrace{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n}_{\approx 1{,}6}$$

$$\text{avec } u_n = C_n + 1, \begin{cases} u_0 = u_1 = 2 \\ u_{n+1} = u_n + u_{n-1} \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

$$u_n = \frac{5-\sqrt{5}}{5} \underbrace{\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}_{\approx -0{,}6} + \frac{5+\sqrt{5}}{5} \underbrace{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n}_{\approx 1{,}6}$$

$$C_n \sim u_n = O\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

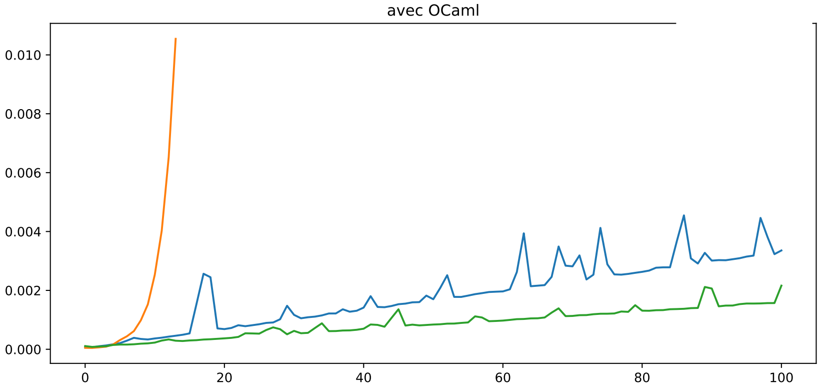
Exercice

Améliorer l'idée précédente en une fonction récursive terminale.

```
let fibo n =
  let rec fiboR a b n = match n with
    | 0 -> a
    | n -> fiboR b (a+b) (n-1)
  in fiboR 1 1 n
;;
```

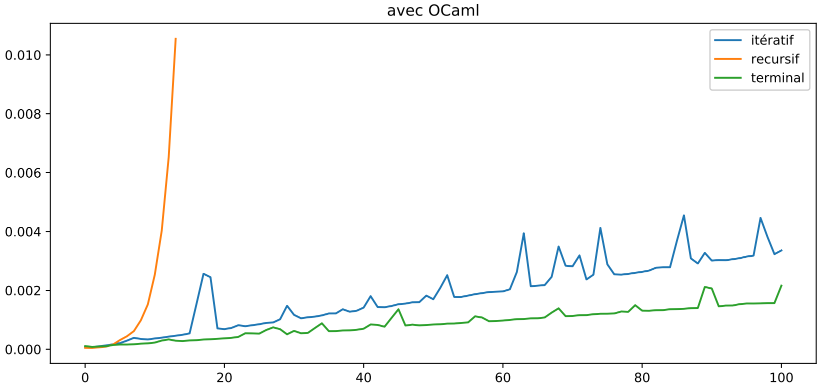
ou

```
let fibo n =
  let rec fiboR a b = function
    | 0 -> a
    | n -> fiboR b (a+b) (n-1)
  in fiboR 1 1 n
;;
```



Exercice

Quelles couleurs pour quels algorithmes ?



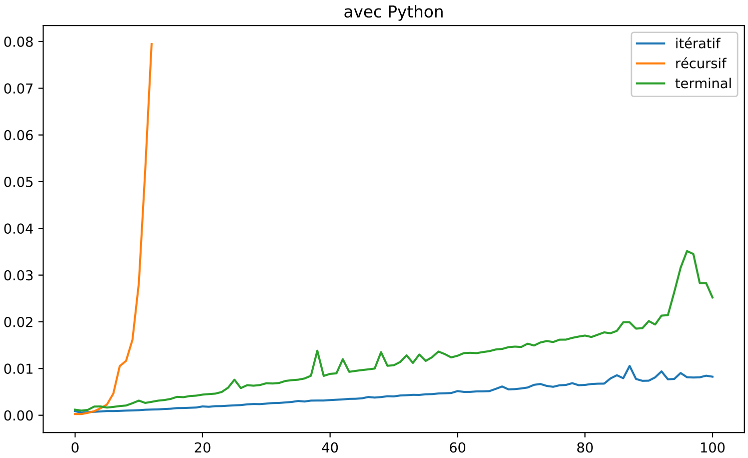
Exercice

Quelles couleurs pour quels algorithmes ?

```
def fibo1(n) :
    moins_un = 1
    moins_deux = 1
    u_n = 1
    for i in range(2,n+1) :
          u_n = moins_un + moins_deux
          moins_deux = moins_un
          moins_un = u_n
    return u_n

def fibo2(n) :
    return 1 if n < 2 else fibo2(n-1) + fibo2(n-2)

def fibo3(n) :
    def fiboR(a,b,n) :
        return a if n==0 else fiboR(b, a+b, n-1)
    return fiboR(1, 1, n)
```


avec Python
0.08
0.07
0.06
0.05
0.04
0.03
0.02
0.01
0.00
0
20
40
60
80
100
itératif
récursif
terminal

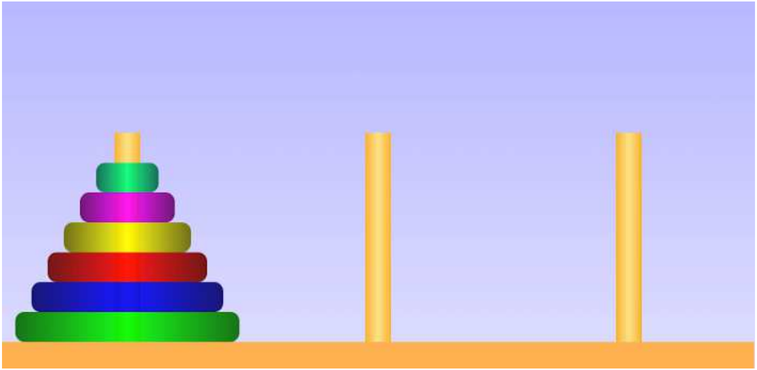
Quel est l'intérêt d'une fonction récursive, si c'est pour faire juste aussi bien que des fonctions itératives ?

```
let rec print n =
        print_int n;
        if n > 0 then print (n-1);;

let rec print n =
        if n > 0 then print (n-1);
        print_int n;;
```

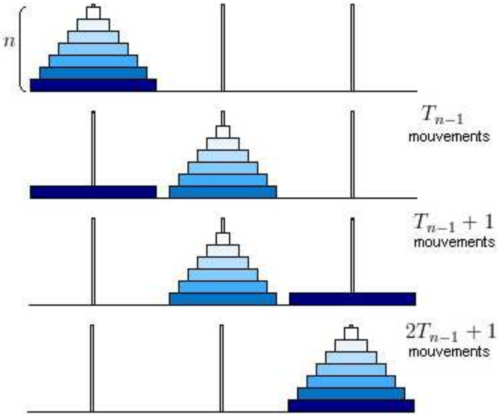
Exercice

Quelles différences entre ces 2 fonctions ?

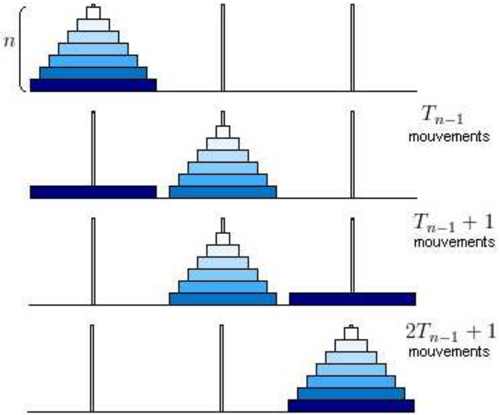


Exercice

Résoudre le problème avec 1, 2 puis 3 disques.
Pour une tour de n étages, quel est le nombre minimum de déplacements à réaliser ?



$$T_{n+1} = 2T_n + 1$$



$$T_{n+1} = 2T_n + 1 \text{ puis } T_n = 2^n - 1$$

```
let rec hanoi n init inter final =
  if n > 0
  then begin
    hanoi (n-1) init final inter;
    print_string ("Déplacer␣un␣disque␣de␣"^init
                          ^"␣vers␣"^final^"\n");
    hanoi (n-1) inter init final
  end;
;;
```

```
let rec hanoi n init inter final =
  if n > 0
  then begin
    hanoi (n-1) init final inter;
    print_string ("Déplacer␣un␣disque␣de␣"^init
                                 ^"␣vers␣"^final^"\n");
    hanoi (n-1) inter init final
  end;
;;
```

Bon courage à celles et ceux qui veulent réaliser ce programme en version non récursive...

Un exemple qui se termine

```
let rec u = function
  | 0 -> α
  | n -> F(u(n-1))
 ;;
```

où

- α est une valeur de type `'a`
- $\mathcal{F}$ est une fonction de type `'a -> 'a`

Cette fonction rend le $n^{\text{ième}}$ terme de la suite (u_n) définie par

$$\begin{cases} u_0 = \alpha \\ u_{n+1} = \mathcal{F}(u_n), \ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Un exemple qui ne se termine pas : **la fonction de Morris**

```
let rec m p q = match p with
      | 0 -> 1
      | _ -> m (p-1) (m p q)
;;
```

$m(1,0) = m(0, m(1,0))$ pourtant le calcul ne termine pas : le passage d'argument se fait par **valeur**, c'est à dire que la valeur des arguments est évaluée **avant** que la fonction ne le soit.

Un exemple qui se termine peut-être... :
la fonction **Q de Hofstadter**

```
let rec q = function
        | 1 -> 1
        | 2 -> 1
        | n -> q(n - q(n-1)) + q(n - q(n-2))
;;
```

Ni la terminaison, ni la non terminaison de cette fonction ne sont démontrées, c'est un problème encore ouvert à ce jour.

Problème de l'arrêt

Il n'existe pas de moyen algorithmique de déterminer la terminaison de n'importe quelle fonction.

Cette affirmation est mathématiquement démontrable : on dit que le problème d'arrêt est un problème indécidable.

Principe de récurrence simple

Soit $\mathcal{P}$ une propriété définie sur $\mathbb{N}$ telle que

$$\begin{cases} \mathcal{P}(0) \text{ est vraie} \\ \forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(n) \Longrightarrow \mathcal{P}(n+1) \end{cases}$$

alors $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(n)$ est vraie.

Ensemble ordonné bien fondé

Un ensemble ordonné $(E; \preceq)$ est bien fondé lorsque toute partie non vide possède un élément minimal.

Principe d'induction

Soit $(E; \preceq)$ un ensemble ordonné bien fondé, A une partie non vide de E et $\varphi : E \setminus A \to E$ telle que $\forall x \in E \setminus A, \varphi(x) \prec x$. Soit $\mathcal{P}$ une propriété définie sur E telle que

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall a \in A,\ \mathcal{P}(a) \text{ est vraie} \\ \forall x \in E \setminus A,\ \mathcal{P}\left(\varphi(x)\right) \Longrightarrow \mathcal{P}(x) \end{array} \right.$$

alors $\forall x \in E,\ \mathcal{P}(x)$ est vraie

Le principe d'induction permet de justifier la terminaison des fonctions f du type :

Propriété

$$\begin{array}{llll} f & E & \longrightarrow & F \\ & x & \longmapsto & \begin{cases} g(x), & \text{si } x \in A \\ h\left(x, f(\varphi(x))\right), & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$$

avec

- $g : A \longrightarrow F$,
- $h : (E \setminus A) \times F \longrightarrow F$
- $\varphi : (E \setminus A) \longrightarrow E$ telle que $\forall x \in E \setminus A, \varphi(x) \prec x$.

factorielle

```
let rec fact = function
   |0 -> 1
   |n -> n*fact (n-1)
;;
```

factorielle

```
let rec fact = function
   |0 -> 1
   |n -> n*fact (n-1)
;;
```

$E = \mathbb{N}$ muni de l'ordre lexicographique

$A = \{0\}$; $\varphi : n \longmapsto n-1$

PGCD

```
let rec pgcd a b = match a with
          | 0 -> b
          | b -> pgcd (a mod b) b
;;
```

PGCD

```
let rec pgcd a b = match a with
        | 0 -> b
        | b -> pgcd (a mod b) b
;;
```

$$E = \mathbb{N}^2 \; ; \; A = \{0\} \times \mathbb{N} \; ; \; \varphi : (p, q) \longmapsto (q \, mod \, p, p)$$

Relation d'ordre : ordre lexicographique.

Fibonacci

```
let rec fibo = function
  | 0 | 1 -> 1
  | n -> fibo (n-1) + fibo(n-2)
;;
```

Fibonacci

```
let rec fibo = function
  | 0 | 1 -> 1
  | n -> fibo (n-1) + fibo(n-2)
;;
```

$$E = \mathbb{N}\ ;\ A = \{0, 1\}\ ;\ \varphi_1 : n \longmapsto n - 1 \text{ et } \varphi_2 : n \longmapsto n - 2$$

Sources :

- http://recursivite.developpez.com/
- http://www.pas-a-pas.eu/vosarticles.php?id=8
- http://abstractstrategygames.blogspot.fr/2010/11/towers-of-hanoi.html
- De nombreux cours sur internet de CPGE...