Primitives

Exercice 1 Primitives d'une fonction du type $u'u^n$

Si vous reconnaissez une forme du style $u'u^n$, alors une primitive sera $\dfrac{u^{n+1}}{n+1}$.
Soit par exemple

$$f(x) = \frac{3}{(x-1)^2} = 3(x-1)^{-2}$$

Si nous posons

$$u(x) = x-1$$

alors

$$u'(x) = 1$$

donc

$$f(x) = 3u'(x)\big(u(x)\big)^{-2}$$

et finalement

$$F(x) = 3\frac{\big(u(x)\big)^{-2+1}}{-2+1} = 3\frac{\big(u(x)\big)^{-1}}{-1} = -\frac{3}{x-1}$$

Exercice 2

f est la fonction définie sur $I = [-1,8]$ par

$$f(x) = \frac{2x^3+8x^2+8x-3}{x^2+4x+4}$$

1. Prouvez que pour tout $x \in I$, $f(x) = 2x - \dfrac{3}{(x+2)^2}$
2. a) Déduisez-en *une* primitive G de f sur I.
   b) Calculez *la* primitive F de f telle que $F(0) = 2$.

Exercice 3

Étudiez si F est une primitive de f sur I

1. $f(x) = \dfrac{2x^2+8x-5}{(x^2+x+3)^2}$ et $F(x) = \dfrac{x^2-x+2}{x^2+x+3}$ avec $I = \mathbb{R}$
2. $f(x) = \dfrac{2x-3}{2x\sqrt{x}}$ et $F(x) = \dfrac{2x+3}{\sqrt{x}}$ avec $I =]0,+\infty[$
3. $f(q) = \dfrac{3q-4}{\sqrt{2q-4}}$ et $F(q) = q\sqrt{2q-4}$ avec $I =]2,+\infty[$

Exercice 4

Le *coût marginal* est la dérivée du *coût total*.
Le coût marginal d'un produit en milliers d'euros est défini sur $[1,10]$ par

$$C_m(q) = q^2 - 10q + \frac{1}{q^2} + 30$$

Déterminez le coût total sachant qu'il est de 10 000 euros pour $q = 1$.

Exercice 5

1. f est la fonction définie sur $]2,+\infty[$ par $f(x) = -\dfrac{2}{(x-2)^2}$
   Calculez une primitive F de f sur $]2,+\infty[$
2. G est la fonction définie sur $]2,+\infty[$ par $G(x) = \dfrac{3x-4}{x-2}$
   Calculez la fonction dérivée de G.
3. Que pouvez-vous en déduire pour les fonctions F et G ?
   Vérifiez ce résultat en calculant $F(x) - G(x)$.

Exercice 6 Reconnaître $\frac{u'}{2\sqrt{u}}$, $\frac{u'}{u^n}$,...

Déterminez une primitive sur $\mathbb{R}$ de :

1. $g : x \mapsto \dfrac{3x}{\sqrt{x^2-1}}$
2. $h : x \mapsto \dfrac{e^x+3}{\left(e^x+3x\right)^3}$
3. $k : x \mapsto \dfrac{1}{(ax+b)^2}$

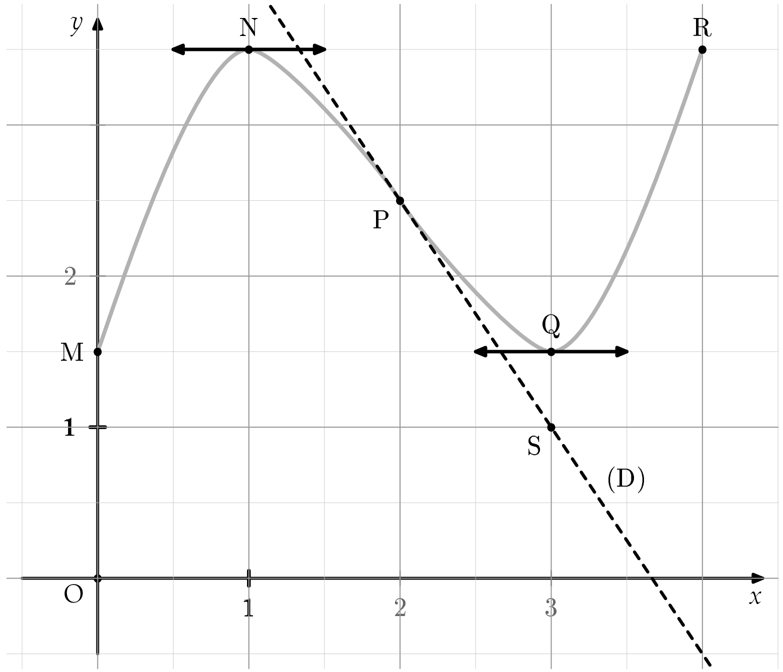
Exercice 7 Reconnaître $nu'u^n$, $u'e^u$,...

Déterminez une primitive sur $\mathbb{R}$ de

1. $f : x \mapsto \dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}$
2. $g : x \mapsto e^{3x+2}$
3. $h : x \mapsto (2x+1)e^{x^2+x+7}$
4. $k : x \mapsto \sin(3x)+3\cos(2x)$

Exercice 8

Soit f la fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[0,4]$ dont la représentation graphique, dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est la courbe $\mathcal{C}$ ci-dessous



Les points M, N, P, Q et R appartiennent à $\mathcal{C}$. Les coordonnées de M sont $(0,3/2)$, celles de N $(1,7/2)$, celles de P $(2,2/5)$ celles de Q $(3,3/2)$ et celles de R $(4,7/2)$.
La courbe $\mathcal{C}$ admet en chacun des points N et Q une tangente parallèle à l'axe des abscisses.
La droite (D) est tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point P ; elle passe par le point S de coordonnées $(3,1)$.

1. a) Donnez par lecture graphique $f'(1)$, $f'(2)$ et $f'(3)$.
   b) Déterminez une équation de la droite (D).
2. Déterminez à l'aide du graphique le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 3$ sur l'intervalle $[0,4]$.
3. a) Pour tout $x \in [0,4]$, on admet que $f'(x) = a(x-1)(x-3)$, a étant une constante réelle.
   Déterminer a à l'aide des résultats de la question 1)a).
   b) Vérifiez que pour tout $x \in [0,4]$, $f'(x) = \dfrac{3}{2}x^2 - 6x + \dfrac{9}{2}$.
   Déterminez l'expression de $f(x)$ pour $x \in [0,4]$.