TROISIÈME AVENTURE

LES COMPLEXES

Résumé Les nombres complexes portent bien leur nom ! Ils interviennent partout : en algèbre, en analyse, en géométrie, en électronique, en traitement du signal, en musique, etc. Et en plus, ils n'ont jamais la même apparence : tantôt sous forme algébrique, tantôt sous forme trigonométrique, tantôt sous forme exponentielle, ... Leur succès vient en fait de deux propriétés : en travaillant sur les nombres complexes, tout polynôme admet un nombre de racines égal à son degré et surtout ils permettent de calculer facilement en dimension 2. Ce n'est pas clair ? Alors détaillons !

I - COURS

A - POURQUOI UTILISE-T-ON LES COMPLEXES ?

A - 1 : Pour résoudre des équations

A - 1 - a : Combien l'équation $x^3 + px + q = 0$ a-t-elle de solutions dans $\mathbb{R}$?

Historiquement, c'est en essayant de résoudre cette équation que les mathématiciens italiens du XVI$^{\text{ème}}$ siècle eurent pour la première fois l'idée d'utiliser des nombres dont le carré est négatif. Nous qui vivons au XXI$^{\text{ème}}$, nous avons des outils pour dénombrer les solutions.

Considérons donc la fonction $f\ :\ x \mapsto x^3 - 36x - 91$ avec p et q. Une étude rapide de cette fonction nous donne le tableau de variation suivant

x	$-\infty$		$-a$		a		$+\infty$
Signe $f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(-a)$	$\searrow$	$f(a)$	$\nearrow$	$+\infty$

On obtient $a = 2\sqrt{3}$ puis $f(-a) < 0$ et $f(a) < 0$, donc l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution réelle. Giralomo Cardano a établi en 1547 qu'une solution d'une équation $x^3 + px + q = 0$ est, sous certaines conditions, de la forme

$$\sqrt[3]{\frac{-q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{-q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

Utilisez cette formule pour trouver une solution de $(E_1)\ :\ x^3 - 36x - 91 = 0$

On voudrait faire de même avec $(E_2)\ :\ x^3 - 15x - 4 = 0$. Tracez sur l'écran de la calculatrice le graphe de $g : x \mapsto x^3 - 15x - 4$ Combien de solutions réelles (E_2) devrait-elle avoir ? Utilisons la formule de Cardan. Un problème apparaît...

Admettons qu'on puisse prolonger les calculs usuels aux racines carrées de nombres négatifs en utilisant le « symbole » $\sqrt{-1}$ et utilisons quand même la formule de notre ami italien.

Bon, on ne semble pas très avancé. Alors un petit coup de pouce : calculez $\left(2 + \sqrt{-1}\right)^3$ et $\left(2 - \sqrt{-1}\right)^3$

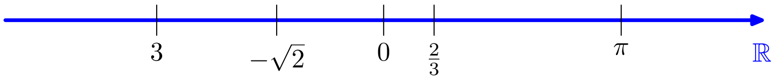
On trouve alors une solution réelle α de (E_2). Or $4p^3 + 27q^2$ est négatif, donc on devrait trouver deux autres racines réelles. Comme on en a une, cela veut dire qu'on peut factoriser $x^3 - 15x - 4$ par $x - \alpha$: faites-le !

Déduisez-en les deux autres solutions réelles.

Ainsi, à partir de ces travaux, les mathématiciens ont eu l'idée de prolonger les calculs algébriques aux expressions comportant des racines carrées négatives. Il faudra attendre le XIX$^{\text{ème}}$ siècle pour que ces nombres « qui ne faisaient que passer » aient droit de cité et soient étudiés rigoureusement. Il faudra attendre la même époque pour que le héros romantique Evariste Galois propose une étude théorique des équations de degré supérieur à 2, mais ceci est une autre histoire...

A - 2 : Pour compter en dimension 2

Vous savez « compter en dimension 1 », c'est à dire additionner et multiplier des nombres réels qu'on peut représenter sur la droite des réels :



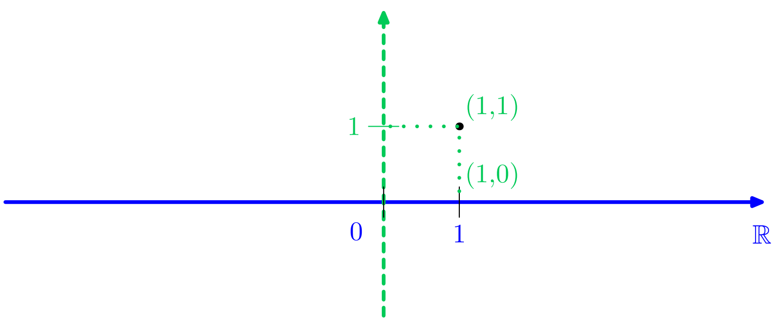
Faute d'outils plus rigoureux [1], on vous a présenté en classe de seconde l'ensemble des nombres réels comme étant l'ensemble des abscisses des points de la droite orientée ci-dessus.
Vous utilisez depuis l'école primaire ces nombres et les opérations usuelles qui leur sont associées, addition et multiplication, sans trop vous poser de questions. Rappelons quelques propriétés [2] :

- ▷ L'addition possède un élément neutre noté 0 : $x + 0 = 0 + x = x$.
- ▷ La somme de 2 réels est encore un réel.
- ▷ Chaque réel x admet un opposé $-x$ vérifiant $x + (-x) = (-x) + x = 0$.
- ▷ La multiplication possède un élément neutre noté 1 : $x \times 1 = 1 \times x = x$
- ▷ Le produit de deux réels est encore un réel.
- ▷ Chaque réel différent de 0 admet un inverse x^{-1} vérifiant $x \times x^{-1} = x^{-1} \times x = 1$
- ▷ La multiplication est distributive sur l'addition : $x \times (y + z) = x \times y + x \times z$.

Tout ceci est bien naturel. Maintenant, on voudrait décoler de l'axe des réels et faire le même travail en dimension 2. Ça veut dire qu'on travaille maintenant sur le plan tout entier ? On note $\mathbb{R}^2$ cet ensemble : l'ensemble des coordonnées des points du plan ! Est-ce qu'on peut définir une addition et une multiplication qui engloberaient et généraliseraient celles vues dans $\mathbb{R}$?
Pour l'addition, on pense à $(x,y) + (x',y') = (x + x',y + y')$. Regardons si les propriétés de l'addition sont vérifiées.

- ▷ On a un élément neutre : $(0,0)$ car $(x,y) + (0,0) = (x + 0,y + 0) = (x,y)$. Et surtout l'élément neutre de $\mathbb{R}^2$ se situe « au même endroit » que celui de $\mathbb{R}$: on l'a juste « gonflé » d'un deuxième zéro pour être reconnu dans $\mathbb{R}^2$.
- ▷ Et pour le symétrique, on prend $(-x, -y)$ car $(x,y) + (-x, -y) = (0,0)$ l'élément neutre.

pour la multiplication, ça doit être pareil : $(x,y) \times (x',y') = (xx',yy')$ avec $(1,1)$ comme élément neutre.
Mais dans ce cas, l'élément neutre de la multiplication dans $\mathbb{R}^2$ ne serait pas « au même endroit » que celui de $\mathbb{R}$



1. Vous les verrez peut-être un jour...Il y a plusieurs manières de construire l'ensemble $\mathbb{R}$. Presque toutes définissent un nombre réel comme étant la limite d'une suite d'approximations par des rationnels.
2. Ces propriétés donnent à $\mathbb{R}$ une structure de *corps* : au temps préhistorique des mes années de collège, cette notion algébrique de corps était vue en 4$^{\text{ème}}$ et maintenant en math sup. On comprend pourquoi tant de vos parents ont été effrayés par les mathématiques...

On voudrait plutôt un élément neutre (1,0) et donc que $(x,y) \times (1,0) = (x,y)$. Je vous propose la multiplication suivante

$$(x,y) \times (x',y') = (xx' - yy', xy' + x'y)$$

Fichtre! Essayons : $(x,y) \times (1,0) = (x \times 1 - y \times 0, x \times 0 + y \times 1) = (x,y)$. Ça marche.
Je vous laisse vérifier que cette multiplication est distributive sur l'addition et que tout élément (x,y) de $\mathbb{R}^2$ différent de (0,0) admet un inverse $\left(\frac{x}{x^2+y^2}, -\frac{y}{x^2+y^2}\right)$.
Vous êtes sûrement impressionné par ce petit exposé, mais on ne voit pas trop le lien avec le $\sqrt{-1}$ du paragraphe précédent.
Et bien observez (0,1) et élevez le au carré.
$(0,1) \times (0,1) = (0 - 1, 0 + 0) = (-1,0)$, bon et alors?
Alors $(-1,0)$, c'est le réel -1 « gonflé ». Donc $\sqrt{-1}$ a un « représentant » dans $\mathbb{R}^2$. Dans le plan, il correspond au point de coordonnées (0,1). Et donc nous allons pouvoir calculer avec ce fameux nombre $\sqrt{-1}$ assez naturellemnt en utilisant les opérations décrites précédemment.
Enfin, naturellement, c'est beaucoup dire ! C'est un peu compliqué comme multiplication. C'est pourquoi nous allons adopter une autre tactique. À chaque élément (x,y) de $\mathbb{R}^2$ nous allons faire correspondre un nombre qu'on qualifiera de *complexe*.
L'idée vient de l'observation *intuitive* [3] : « $(x,y) \curvearrowright x \cdot (1,0) + y \cdot (0,1) \curvearrowright x \times 1 + y \times \sqrt{-1} \curvearrowright x + y\sqrt{-1}$ »
Nous allons même donner un nom à ce $\sqrt{-1}$: appelons-le j pour qu'il fasse moins peur. Ainsi nous avons les correspondances

$$\begin{array}{ccccc}
\text{Le point M} & \longleftrightarrow & \text{Le couple } (x,y) & \longleftrightarrow & \text{Le nombre complexe } x + jy \\
\updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow \\
\text{Le plan } \mathcal{P} & \longleftrightarrow & \mathbb{R}^2 & \longleftrightarrow & \text{L'ensemble des nombres complexes}
\end{array}$$

Pour se simplifier la vie, nous allons donner un nom à cet ensemble des nombres complexes : $\mathbb{C}$.. Et maintenant observez comme les calculs deviennent faciles en prologeant les règles valables sur $\mathbb{R}$!

- ▷ $(x+jy)+(x'+jy') = x+jy+x'+jy' = (x+x')+j(y+y')$, comme nous avions $(x,y)+(x',y') = (x+x',y+y')$, mais en plus simple.
- ▷ Et $(x + iy) \cdot (x' + iy') = xx' + jxy' + jyx' + j^2yy'$ N'oubliez pas que $j^2 = -1$ Alors $(x + jy) \cdot (x' + jy') = (xx' - yy') + j(xy' + yx')$, comme nous avions $(x,y) \times (x',y') = (xx' - yy', xy' + yx')$.

Donc nous allons pouvoir calculer en dimension 2 en généralisant les règles de dimension 1. Nous avons juste ajouté ce nombre j de carré -1. En particulier, tous les nombres réels sont des nombres complexes : $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.
Nous allons pouvoir associer à chacun de ces nombres réels un point du plan et donc associer des transformations du plan à des calculs dans $\mathbb{C}$: on va résoudre des problèmes de géométrie par le calcul.

Si vous avez compris ces relations, tout ce qui va suivre va vous paraître « trop » simple....

B - VOCABULAIRE ET PREMIÈRES PROPRIÉTÉS

Suite à la discussion précédente :

3. Les $\curvearrowright$ renvoient à une notion extrêmement importante et rigoureuse : la notion d'*isomorphisme*. Deux ensembles sont isomorphes lorsqu'il existe une bijection entre les deux et que cette bijection « conserve » les opérations. Cela permet de travailler *à isomorphisme près* sur un ensemble compliqué en le remplaçant par un ensemble isomorphe plus approprié à la situation. C'est ce qui se passe entre $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{C}$

Théorème III-1 L'ensemble $\mathbb{C}$

On définit un ensemble $\mathbb{C}$

- ▷ *muni d'une addition et d'une multiplication qui prolongent celles de $\mathbb{R}$*
- ▷ *contenant un nombre i vérifiant $j^2 = -1$*
- ▷ *tel que chaque élément z de $\mathbb{C}$ peut s'écrire de manière **unique** sous la forme*

$$z = a + jb \quad \text{avec } a \text{ et } b \text{ des nombres réels}$$

B - 1 : Forme algébrique

Cette écriture unique est appelée **forme algébrique** du réel z.
Le nombre a est appellé **partie réelle** de z et notée $\mathcal{R}e(z)$
Le nombre b est appellé **partie imaginaire** de z et notée $\mathcal{I}m(z)$

⚠ $\mathcal{I}m(z)$ est un nombre réel.

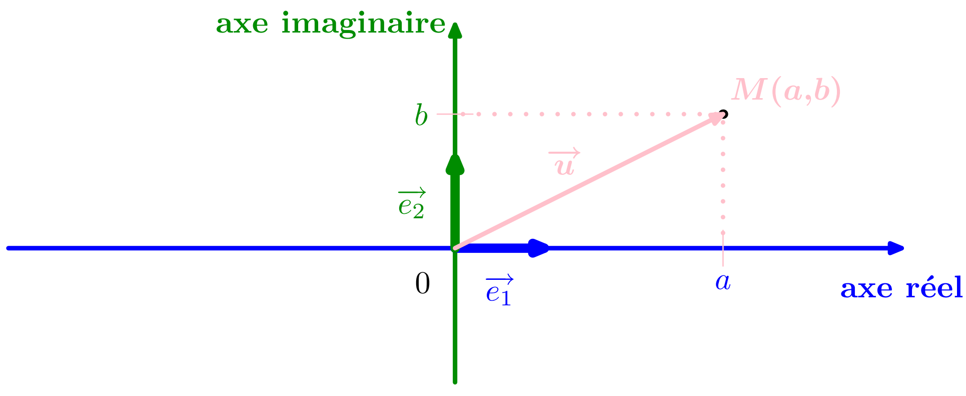
B - 2 : À quoi sert l'unicité de la forme algébrique?

Par exemple, après maints calculs savants, vous arrivez au résultat $2x + 3y - 5 + j(7x - 32y + 1) = 0$ avec x et y des réels. Et bien le membre de gauche est une forme algébrique puisque de la forme réel + j·réel. Or la forme algébrique de 0 est $0 + j \cdot 0$.
Ainsi, une équation complexe revient à deux équations réelles (bienvenue dans la deuxième dimension...) et donc

$$2x + 3y - 5 + j(7x - 32y + 1) = 0 \iff \begin{cases} 2x + 3y - 5 = 0 \\ 7x - 32y + 1 = 0 \end{cases}$$

B - 3 : Le plan complexe

Nous avons vu que chaque nombre complexe peut être associé à un point du plan qu'on munit d'un repère $(O,\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2})$



À tout nombre complexe $z = a + jb$ on associe le point M de coordonnées (a,b) qu'on appelle **image** de complexe $z = a + jb$. On le note souvent $M(z)$.
Inversement, à tout point M du plan de coordonnées (a,b), on associe son **affixe** $z = a + jb$ qu'on note souvent z_M.
Enfin, à tout vecteur $\overrightarrow{u} = a\overrightarrow{e_1} + b\overrightarrow{e_2}$ de coordonnées (a,b) dans la base $(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2})$ est associé une affixe $z_{\overrightarrow{u}} = a + jb$

B - 4 : Premiers calculs géométriques

▷ Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de coordonnées respectives (a,b) et (a',b'), alors $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}=(a+a')\overrightarrow{e_1}+(b+b')\overrightarrow{e_2}$, donc

$$\boxed{z_{\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}}=z_{\overrightarrow{u}}+z_{\overrightarrow{v}}}$$

▷ De même, si λ est un nombre réel

$$\boxed{z_{\lambda\overrightarrow{u}}=\lambda z_{\overrightarrow{u}}}$$

▷ Alors, si I est le **milieu** du segment $[A,B]$, on a

$$\boxed{z_I=\frac{1}{2}(z_A+z_B)}$$

▷ Plus généralement, si G est le barycentre du système $\left\{(A_1,\alpha_1),(A_2,\alpha_2),\cdots,(A_n\alpha_n)\right\}$ alors

$$\boxed{z_G=\frac{\alpha_1 z_{A_1}+\alpha_2 z_{A_2}+\cdots\alpha_n z_{A_n}}{\alpha 1+\alpha 2+\cdots\alpha_n}}$$

▷ Pour tous points A et B

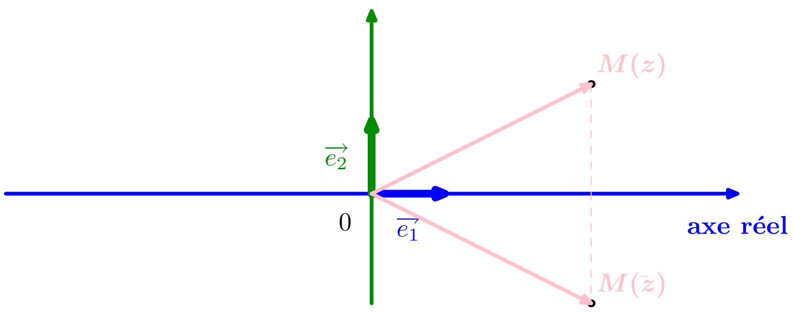
$$\boxed{z_{\overrightarrow{AB}}=z_B-z_A}$$

B - 5 : Conjugué d'un complexe

Définition III-1 Conjugué
On appelle conjugué du nombre complexe $z=a+jb$ le nombre

$$\overline{z}=a-jb$$

Géométriquement cela donne



Je vous laisse prouver les propriétés immédiates suivantes

Propriété III-1 Propriétés des conjugués

- ▷ *$M(z)$ et $M'(\overline{z})$ sont symétriques par rapport à l'axe $(O,\overrightarrow{e_1})$*
- ▷ $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$
- ▷ $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\ \overline{z_2}$
- ▷ $\overline{\overline{z}} = z$
- ▷ $z \in \mathbb{R} \iff z = \overline{z}$
- ▷ $z \in i\mathbb{R} \iff z = -\overline{z}$
- ▷ $\mathcal{R}e(z) = \frac{1}{2}(z + \overline{z})$
- ▷ $\mathcal{I}m(z) = \frac{1}{2}(z - \overline{z})$
- ▷ *Si $z = a + jb$, alors $z\overline{z} = a^2 + b^2$*

B - 6 : À quoi servent les conjugués ?

B - 6 - a : À montrer qu'un complexe est un réel

En effet, si on arrive à montrer que $\overline{z} = z$, alors on en conclut que z est réel.

B - 6 - b : À rendre réel des dénominateurs pour obtenir des formes algébriques

En effet,

$$z \cdot \overline{z} = (a + jb)(a - jb) = a^2 - (jb)^2 = a^2 + b^2$$

Ainsi, pour obtenir la forme algébrique de l'inverse de $2 + j$,

$$\frac{1}{2+j} = \frac{1}{2+j} \times \frac{2-j}{2-j} = \frac{2+j}{4+1} = \frac{2}{5} + \frac{1}{5}j$$

B - 7 : Module d'un nombre complexe

Définition III-2 Module

Le module du complexe z est le réel positif noté $|z|$ tel que

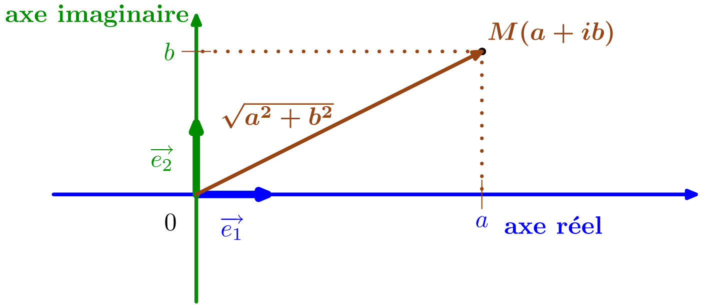
$$|z| = \sqrt{z\ \overline{z}}$$

Quelques remarques

- ▷ Cette définition en est bien une car $z\ \overline{z} = a^2 + b^2$ d'après notre étude sur les conjugués.
- ▷ Si a est un réel, $|a| = \sqrt{a\ \overline{a}} = \sqrt{aa} = \sqrt{a^2}$ car $\overline{a} = a$. Donc le module de a est bien la valeur absolue de a et notre notation est cohérente.

  La notion de module dans $\mathbb{C}$ généralise donc celle de valeur absolue dans $\mathbb{R}$.

B - 7 - a : Interprétation géométrique



Nous venons de voir que, si $z = a + jb$, alors

$$\boxed{|z| = \sqrt{a^2+b^2}}$$

Or, qu'est-ce que $\sqrt{a^2+b^2}$ si ce n'est la norme du vecteur $\overrightarrow{OM}$ ou encore la longueur OM.

$$\boxed{|z_M| = \|\overrightarrow{OM}\| = OM \qquad |z_{\overrightarrow{u}}| = \|\overrightarrow{u}\|}$$

B - 7 - b : Propriétés des modules

Je vous laisse prouver les propriétés suivantes

Propriété III-2 Modules

- ▷ $|\overline{z}| = |z|$
- ▷ $|z| = 0 \Longleftrightarrow z = 0$
- ▷ $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$
- ▷ $\mathcal{R}e(z) \leqslant |z|$
- ▷ $\mathcal{I}m(z) \leqslant |z|$

La propriété suivante mérite une petite aide à la démonstration

Propriété III-3 Inégalité triangulaire

$$|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$$

C'est à dire, pour aller de Nantes à Montaigu, il est plus long de passer par Bratislava que de suivre la RN 137. Comme il s'agit d'une démonstartion classique, nous allons la détailler. Elle pourra servir à d'autres occasions.

Comme les deux membres de l'inégalité sont positifs, il suffit donc de comparer les carrés de chaque membre.
Or $|z_1+z_2|^2 = (z_1+z_2)\left(\overline{z_1+z_2}\right) = (z_1+z_2)\left(\overline{z_1}+\overline{z_2}\right) = |z_1|^2 + (z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2) + |z_2|^2$

D'autre part $(|z_1|+|z_2|)^2 = |z_1|^2 + 2\,|z_1z_2| + |z_2|^2$
Il s'agit donc de comparer les « doubles produits ».
Or $z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2 = z_1\overline{z_2}+\overline{z_1\overline{z_2}} = 2\mathcal{R}e\,(z_1z_2) \leqslant 2\,|z_1z_2|$ d'après une propriété ci-dessus. Donc

$$|z_1+z_2|^2 = |z_1|^2 + (z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2) + |z_2|^2 \leqslant |z_1|^2 + 2\,|z_1z_2| + |z_2|^2 = (|z_1|+|z_2|)^2$$

C - RÉSOLUTION D'ÉQUATIONS DU SECOND DEGRÉ

C - 1 : Racine carrée d'un nombre complexe

L'objet de cette section est de résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 = \alpha$

C - 1 - a : Racine carrée d'un nombre réel

On suppose ici que α est un réel.

- $\boldsymbol{\alpha \geqslant 0}$: alors $z^2 = \alpha \iff (z - \sqrt{\alpha})(z + \sqrt{\alpha}) = 0$. Les solutions[4] sont donc $\pm\sqrt{\alpha}$
  On connait : $z^2 = 4 \iff z = -2$ ou $z = 2$
- $\boldsymbol{\alpha < 0}$: alors $z^2 = \alpha \iff (z - j\sqrt{-\alpha})(z + j\sqrt{-\alpha}) = 0$. Les solutions sont donc $\pm j\sqrt{-\alpha}$
  C'est la nouveauté : $z^2 = -4 \iff z = -2j$ ou $z = 2j$

C - 1 - b : Racine carrée d'un complexe non réel

Les choses se compliquent ! Nous allons traiter un exemple pour ne pas vous faire (trop) peur.
Cherchons les racines carrées de $4 + 3j$, à savoir les nombres $a + ib$ tels que $(a + jb)^2 = a^2 - b^2 + 2jab = 4 + 3j$.
Par unicité de la forme algébrique on obtient

$$\begin{cases} a^2 - b^2 &= 4 \\ a^2 + b^2 &= 5 \\ 2ab &= 3 \end{cases}$$

Ainsi $a^2 = 9/2$ et $b^2 = 1/2$, donc $a = \pm 3\sqrt{2}/2$ et $b = \pm\sqrt{2}/2$, or $2ab = 3$, donc a et b sont de même signe.

Les solutions sont donc $\dfrac{\sqrt{2}}{2}(3 + j)$ et $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}(3 + j)$

C - 2 : Résolution de $ax^2 + bx + c = 0$ avec a, b et c des réels

C'est comme en 1ère : $ax^2 + bx + c = 0 \iff a\left[\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right] = 0 \iff \left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 = \dfrac{b^2 - 4ac}{(2a)^2}$

Tout dépend donc du signe de $b^2 - 4ac$, puis on utilise les résultats de la section précédente.

Théorème III-2 Résolution de $ax^2 + bx + c = 0$ avec a, b et c des réels

L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet toujours des solutions sur $\mathbb{C}$.
Notons $\Delta = b^2 - 4ac$ le ***discriminant*** *de l'équation*

- *Si $\Delta = 0$, il existe une unique solution $x = -\dfrac{b}{2a}$*
- *Si $\Delta > 0$, il existe deux solutions réelles $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$*
- *Si $\Delta < 0$, il existe deux solutions complexes conjuguées $x = \dfrac{-b \pm j\sqrt{-\Delta}}{2a}$*

Vous serez amenés au hasard d'exercices à résoudre des équations à coefficients complexes, mais on n'attend de vous aucun savoir-faire particulier : vous serez guidés pas à pas.

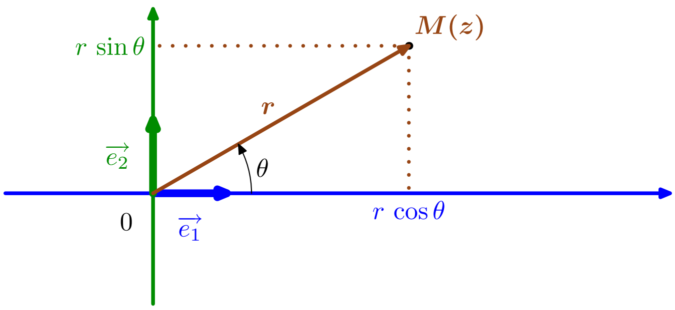
4. LA solution si $\alpha = 0$

D - FORME TRIGONOMÉTRIQUE

D - 1 : Argument d'un complexe non nul

D - 1 - a : Forme trigonométrique

Vous vous souvenez de la correspondance entre $\mathbb{C}$ et le Plan. Nous avions privilégié les coordonnées cartésiennes d'un point. On aurait pu utiliser tout aussi bien ses **coordonnées polaires**. Le Plan a cette fois besoin d'être orienté (il le sera implicitement à partir de maintenant).



Ainsi, (r,θ) étant le couple de coordonnées polaires de l'image M de z, on a $z = r\cos\theta + jr\sin\theta$ déterminé de manière unique, car c'est en fait une forme algébrique déguisée : on l'appelle **forme trigonométrique** du complexe z.

$$\boxed{z = r\,(\cos\theta + j\sin\theta)}$$

D - 1 - b : Congruence modulo 2π

Vous rencontrerez souvent [5] la notation $x \equiv y[2\pi]$ qui se lit « x est congru à y modulo 2π ». Elle veut simplement dire que $x - y$ est un multiple de 2π, c'est à dire qu'il existe un entier relatif k tel que $x - y = k \times 2\pi$. Retenons

$$\boxed{x \equiv y[2\pi] \iff \text{ il existe } k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } x = y + 2k\pi}$$

Par exemple, vous savez que $\dfrac{\pi}{3} \equiv \dfrac{4\pi}{3}[2\pi]$.

D - 1 - c : Mesure d'un angle de vecteurs

Nous n'avons pas les moyens de définir « proprement » les angles de vecteurs. Nous n'en avons qu'une définition intuitive. Ce qui nous intéresse, c'est que θ est UNE mesure en radians de l'angle de vecteurs $\left(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{OM}\right)$. UNE mesure, car elle est définie modulo 2π. Et bien cette mesure sera UN argument du complexe z, qu'on notera $\arg z$. On retiendra

$$\boxed{\arg z \equiv \theta[2\pi]}$$

Par exemple, $\arg 32 \equiv 0[2\pi]$, $\arg 32j \equiv \dfrac{\pi}{2}[2\pi]$.

5. Cela doit titiller la mémoire des spécialistes

D - 1 - d : Relations entre forme algébrique et forme trigonométrique

Soit z le complexe de forme algébrique $a+jb$ et de forme trigonométrique $r\left(\cos\theta + j\sin\theta\right)$ alors on a d'une part

$$\boxed{a = r\cos\theta \qquad b = r\sin\theta}$$

et d'autre part

$$\boxed{r = |z| = \sqrt{a^2+b^2}}$$

D - 1 - e : Des formes trigonométriques de référence

- ▷ $1 = \cos 0 + j\sin 0$ donc $|1| = 1$ et $\arg(1) \equiv 0[2\pi]$
- ▷ $j = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + j\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$ donc $|j| = 1$ et $\arg(j) \equiv \left(\frac{\pi}{2}\right)[2\pi]$
- ▷ $|1+j| = \sqrt{2}$ et $1+j = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + j\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$ donc $\arg(1+i) \equiv \left(\frac{\pi}{4}\right)[2\pi]$
- ▷ $|\sqrt{3}+j| = 2$ et $\sqrt{3}+j = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}j\right) = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + j\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$ donc $\arg(\sqrt{3}+j) \equiv \left(\frac{\pi}{6}\right)[2\pi]$

D - 2 : Opérations sur les formes trigonométriques

Soit $z = r\left(\cos\theta + j\sin\theta\right)$ et $z' = r'\left(\cos\theta' + j\sin\theta'\right)$, alors

$$zz' = rr'\left[\left(\cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta'\right) + j\left(\sin\theta\cos\theta' + \cos\theta\sin\theta'\right)\right]$$

Vous qui connaissez parfaitement vos formules d'addition, vous en déduisez que

$$zz' = z = rr'\left(\cos\left(\theta+\theta'\right) + j\sin\left(\theta+\theta\right)'\right)$$

Ainsi, nous arrivons au résultat capital

$$\boxed{\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')\,[2\pi]}$$

Cela va VOUS permettre de démontrer les propriétés suivantes avec un peu d'astuce et de patience

Propriété III-4 Propriétés algébriques des arguments

- ▷ $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')\,[2\pi]$
- ▷ $\arg(z^n) = n\arg(z)\,[2\pi]$
- ▷ $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z)\,[2\pi]$
- ▷ $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')\,[2\pi]$
- ▷ $\arg(\overline{z}) = -\arg(z)\,[2\pi]$
- ▷ $\arg(-z) = \pi + \arg(z)\,[2\pi]$

En particulier, la formule concernant z^n nous permet d'écrire

Théorème III-3 Formule de Moivre

$$\left(\cos\theta + j\sin\theta\right)^n = \cos(n\theta) + j\sin(n\theta)$$

Nous nous rendons ainsi compte que

Les formes trigonométriques sont adaptés aux produits de complexes

Les formes algébriques sont adaptées aux sommes de complexes

E - FORME EXPONENTIELLE

E - 1 : Pourquoi cette notation ?

Notons f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos x + j \sin x$. C'est une fonction un peu spéciale puisqu'elle est définie sur $\mathbb{R}$ mais est à valeurs dans $\mathbb{C}$. En particulier $f(0) = \cos 0 + j \sin 0 = 1$
Je vous demande à présent un petit effort d'imagination : on peut supposer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en considérant j comme un coefficient quelconque et en extrapolant les formules de dérivations des fonctions à valeurs réelles. Cela donne

$$f'(x) = -\sin x + i \cos x$$

Essayons alors de faire le lien avec $f(x)$: on a $f'(x) = i(i \sin x + \cos x) = if(x)$, oui, et alors ?
Récapitulons : f vérifie $f' = if$ avec $f(0) = 1$. Ça ne vous rappelle rien ?
Ciel ! La fonction exponentielle ! On avait $f' = kf$ et $f(0) = 1$ alors on en concluait que $f(x) = e^{kx}$.
Donc vous ne serez pas choqué si nous écrivons, par convention d'écriture à notre niveau, que $f(x) = \exp(jx) = e^{jx}$.

Notation exponentielle

On convient d'écrire, pour tout réel x

$$e^{jx} = \cos x + j \sin x$$

Notez au passage que les formules d'additions sont alors plus faciles à retrouver. En effet, $e^{j(a+b)} = e^{ja}e^{jb}$, donc

$$\cos(a+b) + j\sin(a+b) = (\cos a + j \sin a)(\cos b + j \sin b) = (\cos a \cos b - \sin a \sin b) + j(\cos a \sin b + \cos b \sin a)$$

Alors, par unicité de la forme algébrique d'un complexe, on obtient :

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \quad \text{et} \quad \sin(a+b) = \cos a \sin b + \cos b \sin a$$

Enfin, tout comme les formes algébriques et trigonométriques, la forme exponentielle est unique

Propriété III-5

Tout nombre complexe s'écrit de manière unique

$$z = re^{jx}$$

avec $r \in [0, +\infty[$ et $x \in]-\pi, \pi]$

Pourquoi ce $x \in]-\pi,\pi]$? Et bien que pensez-vous de $e^{i\pi/3}$ et $e^{7i\pi/3}$?

E - 2 : Formules d'Euler et applications

Comme $e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$ et $e^{-j\theta} = \cos(-\theta) + j\sin(-\theta) = \cos\theta - j\sin\theta$ on a

Propriété III-6 Formules d'Euler

$$\cos\theta = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2} \qquad \sin\theta = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}$$

E - 2 - a : Formule du binôme et triangle de Pascal

Vous vous souvenez d'avoir vu en terminale LA formule, celle qui sert partout, en algèbre, en analyse, en probabilité, car
Sir Isaac n'a pas fait que dormir sous un pommier. Il a par exemple établi que

Théorème III-4 La formule du binôme de Newton
Soit a et b des nombres complexes et n un entier naturel non nul, alors

$$(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} a^p b^{n-p} = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \cdots + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + b^n$$

On admettra cette formule qui se prouve par récurrence.
Cette formule nous permet donc d'obtenir de nouveaux « produits remarquables », à conditions de connaître les coefficients binomiaux.
Testez la formule aux rangs 2, 3, 4, 5. Disposez vos résultats dans un tableau en n'écrivant que les coefficients et conjecturer le triangle de Pascal...et profitez-en pour apprendre à compter en japonais.

Le triangle de Pascal au Japon.

E - 2 - b : Linéarisation de $(\cos t)^n$ et $(\sin t)^n$

Par exemple, nous voulons linéariser $(\cos t)^5$ qu'on note habituellement $\cos^5 t$. Cela signifie qu'on veut exprimer $\cos^5 t$ sans utiliser de puissances.
Or $\cos t = \dfrac{e^{jt}+e^{-jt}}{2}$, donc $\cos^5 t = \dfrac{1}{2^4}\dfrac{\left(e^{jt}+e^{-jt}\right)^5}{2}$. Il ne nous reste plus qu'à développer le numératuer à l'aide du triangle de Pascal.