TP algorithmique 2 - Nombre d'Or - 2^{nde} 4

I Des animaux, des plantes et des nombres

a. Des lapins

Voici l'énigme des lapins qui fut proposée en 1202 par Léonard de Pise, fils de Bonacci :

Exploration 1 : Lapins de Fibonacci

Partant d'un couple, combien de couples de lapins obtiendrons-nous après un nombre donné de mois sachant que chaque couple produit chaque mois un nouveau couple, lequel ne devient productif qu'après deux mois.

Alors...le mois n°0, il y a 1 couple de bébés lapin...le mois n°1 encore le même couple...le mois n°2, hop, un couple de bébés naît, ça fait deux couples en tout...le mois n°3, un couple de plus, ça fait 3 couples...

b. Des fourmis et des abeilles

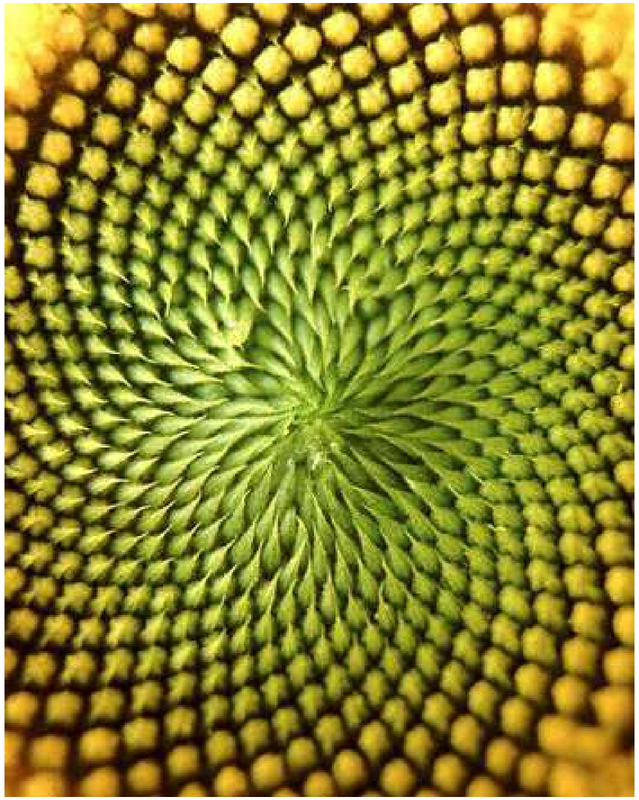
Exploration 2 : arbre généalogique

Les abeilles et les fourmis ne naissent pas comme nous dans les roses ou les choux mais sortent du ventre de leur reine qui passe sa vie à pondre.
Lorsque l'œuf est fécondé, le bébé est femelle, sinon, ce sera un mâle.
Ainsi, une femelle a un papa et une maman alors qu'un mâle n'a qu'une maman.
On voudrait compter les ancêtres d'un mâle de la septième génération.

Bon, alors, un mâle a une seule maman, cette maman a un papa et une maman et... vaudrait mieux dresser un arbre généalogique, ce sera plus clair.

Appelons $A(n)$ le nombre d'ancêtres de la génération n, $F(n)$ le nombre de femelles et $M(n)$ le nombre de mâles.

c. Des tournesols



Comptez les spirales....

d. Des pommes de pin

Comptez les spirales...

e. Des ordinateurs

Exploration 3 : Fibonacci : le retour

On appelle suite de Fibonacci la « séquence » de nombres :

$$1 - 1 - 2 - 3 - 5 - 8 - 13 - 21 - 34 - 55 - 89 - \cdots$$

Quel est le suivant ?

Essayez de trouver un algorithme malin afin que CAML puisse calculer le n-eme nombre de cette séquence.
Utilisez cet algorithme pour étudier le quotient d'un terme de cette séquence par le précédent.

II Des hommes et un nombre

a. Un rectangle

Exploration 4 : un rectangle en or

- Tracez un segment ;
- tracez un autre segment, perpendiculaire au premier et de longueur double. On obtient ainsi un triangle rectangle ;
- prolongez le premier segment à partir de son extrémité libre d'une longueur égale à l'hypoténuse du triangle précédemment tracé ;
- on obtient à présent un rectangle. Calculez de manière exacte le quotient entre la largeur et la longueur de ce rectangle puis donnez-en une valeur approchée.

Cela vous rappelle-t-il quelque chose ?

b. Une spirale

Exploration 5 : une spirale en or

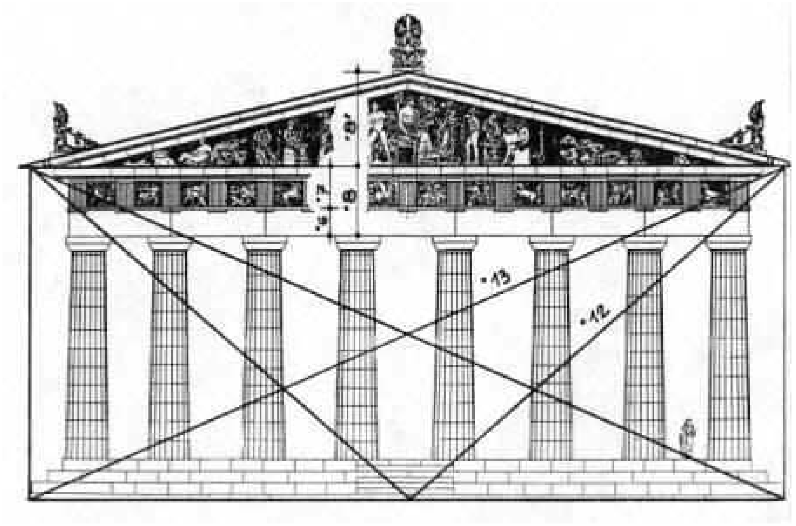
On reprend le rectangle précédent. On trace à l'intérieur le carré de côté la largeur du rectangle. Que pensez-vous de petit rectangle restant ? Et si on continuait ?

À partir du coin supérieur droit du carré, tracez un arc de cercle de rayon le côté du carré et d'extrémités les coins supérieur gauche et inférieur droit puis réitérez le processus pour obtenir une spirale.

c. Le Parthénon

Exploration 6 : Parthénon en or

Retrouvez des proportions d'Or dans le Parthénon.



d. Khéops

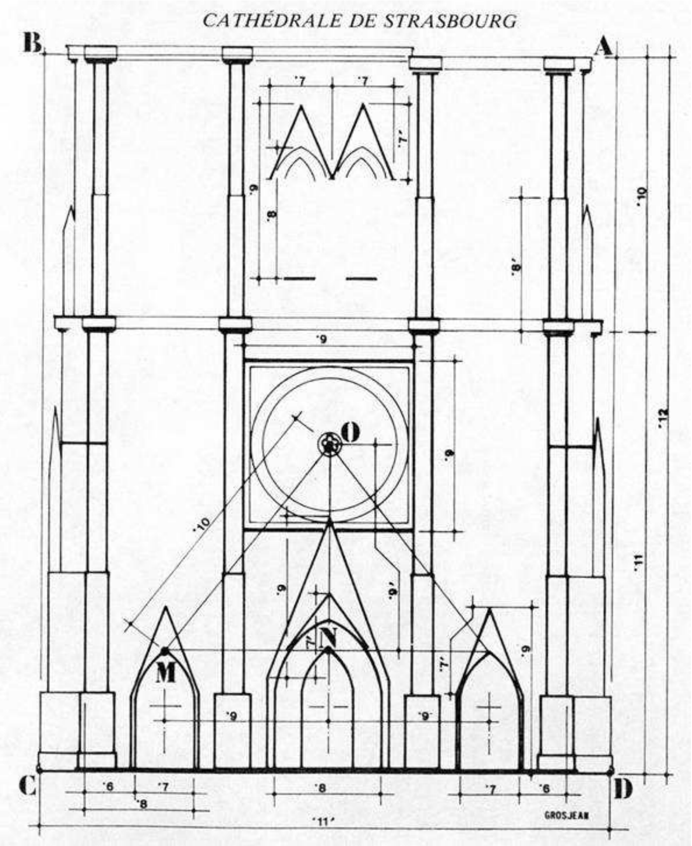
Exploration 7 : Pyramide en or

La hauteur de la pyramide de Khéops est de 148,2m. Le côté de sa base carré mesure 232,8m. Calculez la hauteur d'une de ses faces triangulaires. Retrouvez alors une proportion en or...

e. Strasbourg

Exploration 8 : Parthénon en or

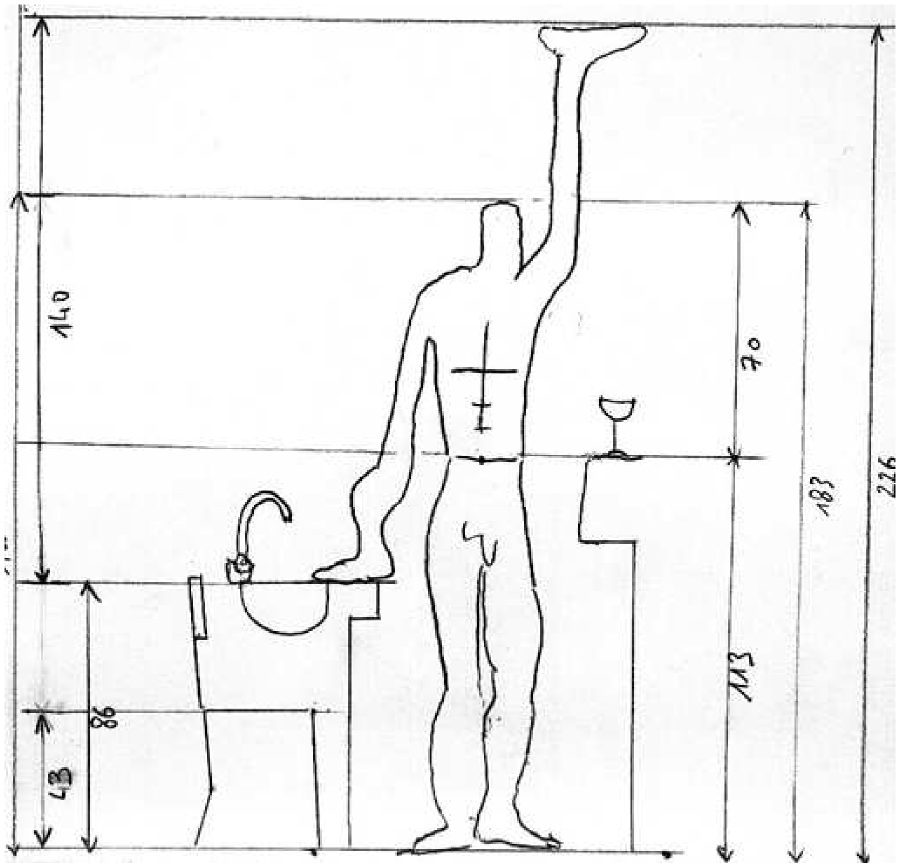
Retrouvez des proportions d'Or dans la cathédrale de Strasbourg.



f. Rezé

Exploration 9 : Le Corbusier

L'architecte Le Corbusier qui a conçu notre Maison Radieuse municipale a conçu les dimensions de ses appartements selon le principe du *Modulor* représenté dans la figure suivante. Où se cache l'or ?...



III Des calculs et un nombre

a. Sans calculatrice

Exploration 10 : Φ

On note Φ le nombre d'or. Simplifiez l'écriture de $1+\frac{1}{\Phi}$. Que remarquez-vous ? Simplifiez l'écriture de Φ^2 puis simplifiez l'écriture de $1+\Phi$. Que remarquez-vous ?

b. Avec ordinateur

Exploration 11 : racines

Donnez une approximation de

1. $a_0 = 1$
2. $a_1 = \sqrt{1+\sqrt{1}}$
3. $a_2 = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1}}}$
4. $a_3 = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1}}}}$
5. $a_4 = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1}}}}}$

Que pensez-vous des algorithmes suivant :

```
# let rec racor(n)=
    if n=0 then 1.
    else sqrt(1. +. racor(n-1));;
```

```
racor(n):={
r:=1.;
 for(k:=1;k<=n;k:=k+1){
     r:=sqrt(1+r)
 }
return(r)
}:;
```

Exploration 12 : inverses

Donnez une approximation de

1. $b_0 = 1$
2. $b_1 = 1 + \frac{1}{1}$
3. $b_2 = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1}}$
4. $b_3 = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1}}}$
5. $b_4 = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1}}}}$
6. $b_5 = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1}}}}}$

Trouvez un algorithme malin pour calculer b_n avec CAML et un algorithme impératif avec XCAS.