BTS domotique 1 - Calcul intégrale - Épreuves d'examen

Exercice 1 BTS 2009

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = e^{2x} + e^{x} - x - 2.$$

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal d'unité 2c̃m.

1. a) Déterminer $\lim_{x \to +\infty} f(x)$. On pourra mettre e^x en facteur dans $f(x)$.
   b) Déterminer $\lim_{x \to -\infty} f(x)$.
   c) Démontrer que la droite D d'équation $y = -x - 2$ est une asymptote de la courbe $\mathcal{C}$.
   d) Étudier la position relative de $\mathcal{C}$ et D.
2. a) Calculer $f'(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$.
   b) Vérifier que pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x) = 2\left(e^x + 1\right)\left(e^x - \dfrac{1}{2}\right)$.
   c) Déduire du b. le signe de $f'(x)$ lorsque x varie dans $\mathbb{R}$.
   d) Établir le tableau variation de la fonction f.
3. Construire D et $\mathcal{C}$.
4. Calculer la valeur exacte en cm^2, de l'aire de la partie du plan limitée par la courbe $\mathcal{C}$, son asymptote D et les droites d'équations $x = -1$ et $x = 0$.

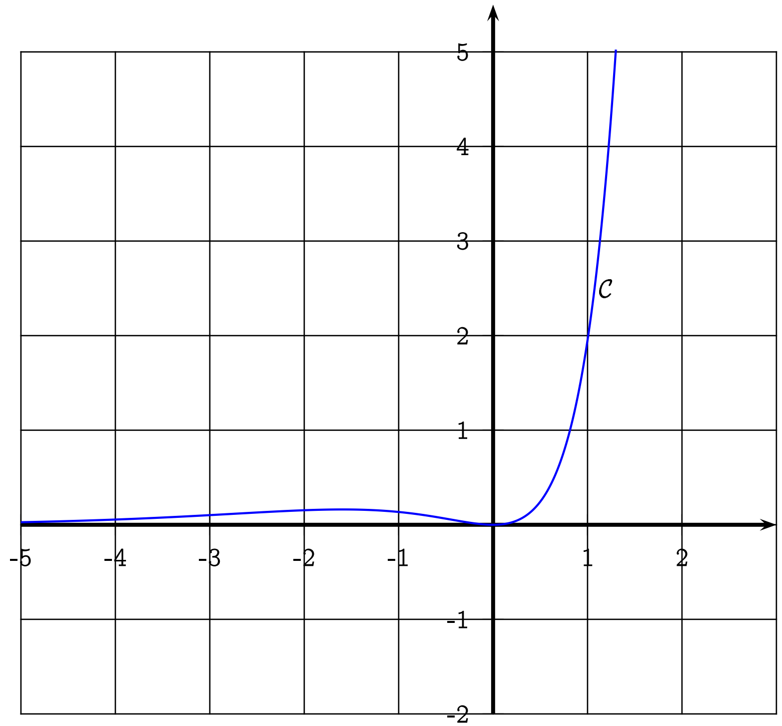
Exercice 2 BTS 2008

Étude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = e^{2x} - (x+1)e^{x}.$$

Sa courbe représentative $\mathcal{C}$ est donnée dans un repère orthogonal ci-dessous.



1. Démontrer que pour tout réel x, $f'(x) = e^x(2e^x - 2 - x)$.
2. En déduire le coefficient directeur $f'(0)$ de la tangente T à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abcisse 0.
   Interpréter graphiquement ce résultat.

Calcul intégral

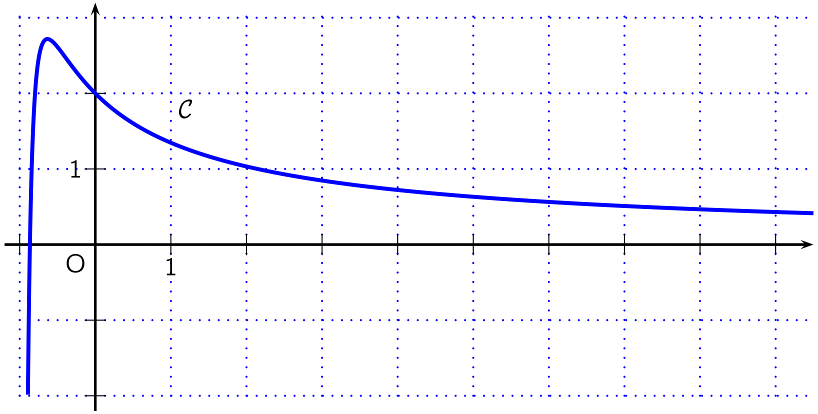
1. On note $I = \displaystyle\int_{-0,3}^{0,3} \frac{x^2}{2} dx$.
   Démontrer que $I = 0,009$.

2. On note $J = \displaystyle\int_{-0,3}^{0,3} e^{2x}dx$.
   Démontrer que $J = 0,5\left(e^{0,6} - e^{-0,6}\right)$.
3. On note $K = \displaystyle\int_{-0,3}^{0,3} (x+1)e^{x}dx$.
   Démontrer, à l'aide d'une intégration par parties, que $K = 0,3\left(e^{0,3} + e^{-0,3}\right)$.
4. On note $L = \displaystyle\int_{-0,3}^{0,3} f(x)dx$.
   a) Déduire des questions précédentes la valeur exacte de L.
   b) Donner la valeur approchée de L arrondie à 10^{-3}.
   c) Vérifier que la valeur exacte de I et la valeur approchée de L obtenue à la question précédente diffèrent de $4,5 \times 10^{-4}$.

Exercice 3 BTS 2005

B. Etude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $]-1;+\infty[$ par $f(x) = \frac{2+\ln(1+x)}{1+x}$
Sa courbe représentative $\mathcal{C}$, dans un repère orthonormal où l'unité graphique est 1 cm, est donnée ci-dessous.



1. On admet que $\lim\limits_{x\to-1} f(x) = -\infty$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.
   Que peut-on en déduire pour la courbe $\mathcal{C}$?
2. a) Démontrer que, pour tout x de $]-1\ ;\ +\infty[$, $f'(x) = \dfrac{-1-\ln(1+x)}{(1+x)^2}$
   b) Résoudre dans $]-1\ ;\ +\infty[$ l'inéquation $-1-\ln(1+x) \geqslant 0$.
   En déduire le signe de $f'(x)$ lorsque x varie dans $]-1\ ;\ +\infty[$.
   c) Établir le tableau de variation de f.

C. Calcul intégral

1. Déterminer la dérivée de la fonction G définie sur $]-1\ ;\ +\infty[$ par :
$$G(x) = \frac{1}{2}\left[\ln(1+x)\right]^2$$
2. En déduire qu'une primitive de f sur $]-1\ ;\ +\infty[$ est définie par :
$$F(x) = 2\ln(1+x) + \frac{1}{2}\left[\ln(1+x)\right]^2$$
3. a) On note $I = \displaystyle\int_0^2 f(x)\,dx$. Démontrer que $I = \frac{1}{2}(\ln 3)^2 + 2\ln 3$.
   b) Donner la valeur approchée arrondie à 10^{-2} de I.
   c) Donner une interprétation graphique du résultat obtenu au b.

Exercice 4 BTS 2005

Partie B

Soit la fonction f, définie pour tout x réel par $f(x) = e^{2x} - 2x - 1$.

1. Déterminer la limite de f en $-\infty$.
2. Déterminer la limite de f en $+\infty$ (on pourra mettre 2x en facteur dans l'expression de $f(x)$).
3. Soit f' la fonction dérivée de f. Calculer $f'(x)$.
   En déduire les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$ et le signe de $f(x)$ suivant les valeurs du réel x.

Partie C

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ d'unités graphiques 2 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées.

1. Montrer que la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = -2x - 1$ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}$ au voisinage de $-\infty$.
2. Construire la courbe $\mathcal{C}$ et la droite $\mathcal{D}$.
3. On considère l'aire $\mathcal{A}$ du domaine plan délimité par la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.
   Calculer la valeur exacte de $\mathcal{A}$ en cm^2, puis en donner l'approximation décimale arrondie an centième.

Exercice 5 BTS 2008

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \dfrac{4e^x}{e^x + 1}$.

1. On note $I = \displaystyle\int_0^1 g(x)\,dx$.
   a) Démontrer que $I = 4\ln\dfrac{e+1}{2}$.
   b) Donner la valeur approchée arrondie à 10^{-3} de I.
2. On note $J = \displaystyle\int_0^1 \left(2 + x - \frac{x^3}{12}\right) dx$.
   a) Démontrer que $J = \dfrac{119}{48}$. 48
   b) Donner la valeur approchée arrondie à 10^{-3} de J.
   c) Vérifier que les valeurs approchées de I et de Jobtenues au 1. b. et au 2. b. diffèrent de $0,001$.

Exercice 6 BTS 2009

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2xe^{-x^2}$.
On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal, d'origine O.

1. Déterminer une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
2. Soit a un réel strictement positif
   a) Calculer l' intégrale : $I_a = \displaystyle\int_0^a f(x)\,dx$, dont la valeur dépend du réel a.
   b) Étudier $\displaystyle\lim_{a\to+\infty} I_a$.

Exercice 7 BTS 2008

1. Calculer, à l'aide d'une integration par parties, la valeur exacte de :
$$I = \int_0^{0,1} (x+1)e^{-x}\,dx.$$
2. a) Calculer la valeur exacte de l'intégrale $J = \displaystyle\int_0^{0,1} \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right) dx$.
   b) A-t-on $|I - J| \leqslant 10^{-4}$?
   (Si c'est le cas, on peut considérer que J est une bonne approximation de I)

Exercice 8 BTS 2008

On considère la fonction f, définie pour tout réel positif x, par :
$$f(x) = x - 3 + \frac{4}{1+2x}.$$

1. Calculer la valeur exacte de l'intégrale : $I = \displaystyle\int_0^{0,1} f(x)\,dx$.
2. Calculer la valeur exacte de l'intégrale : $J = \displaystyle\int_0^{0,1} \left(1 - 7x + 16x^2\right) dx$.
3. J est-elle une valeur approchée à 10^{-3} près de I ?

Exercice 9 BTS 2007

Soit f la fonction définie sur $[0\,;\,3]$ par
$$f(x) = 2e^{-\frac{1}{2}x}\sqrt{x}.$$

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative dc f dans un repère orthonormal $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, d'unité graphique 4 cm. **A. Étude des variations et courbe représentative**

1. Calculer $f(0)$ et $f(3)$. Donner la valeur approchée arrondie a 10^{-2} de $f(3)$.
2. a) Démontrer que, pour tout x de $]0\,;\,3]$, $f'(x) = \dfrac{e^{-\frac{1}{2}x}(1-x)}{\sqrt{x}}$.

   b) En déduire les variations de f sur]0 ; 3J.
3. On admet qu'à l'origine du repère la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ est l'axe des ordonnées. Construire la courbe $\mathcal{C}$ sur une feuille de papier millimétré,

B. Calcul intégral

On considère le solide de révolution engendré par la rotation de la courbe $\mathcal{C}$ autour de l'axe des abscisses. On désigne par V le volume en unités de volume de ce solide.

On admet que $V = \displaystyle\int_0^3 [f(x)]^2\,dx$.

1. Vérifier que $V = \displaystyle\int_0^3 4\pi x e^{-x}\,dx$.
2. A l'aide d'une intégration par parties, démontrer que :

$$V = 4\pi\left(1 - e^{-3}\right).$$

3. Donner une valeur approchée arrondie à 10^{-2} de V.

Exercice 10 BTS 2008

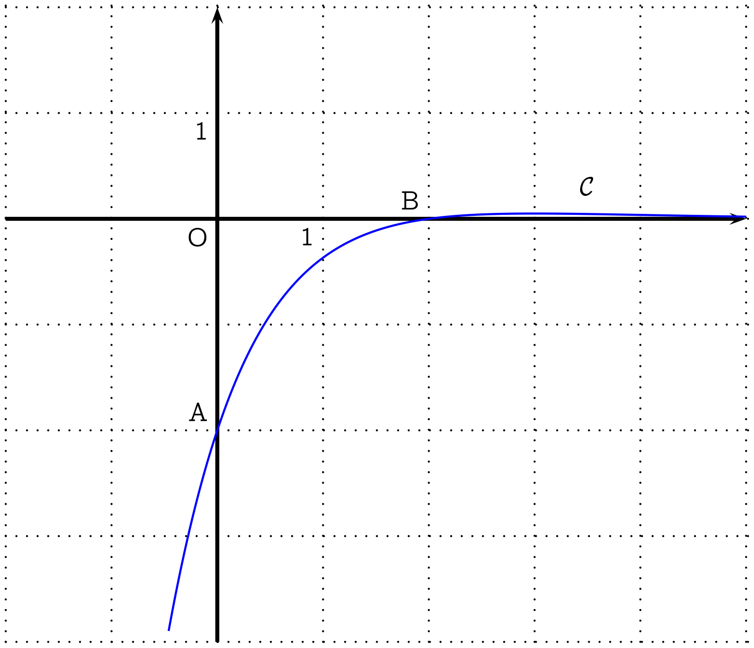
A. Étude des variations d'une fonction

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = (ax + b)e^{-x}$$

où a et b sont deu nombres réels.

La courbe représentative $\mathcal{C}$ de la fonction f dans un repère orthonormal où l'unité graphique est 2 cm est donnée ci-dessous.



1. La courbe $\mathcal{C}$ passe par les points A et B de coordonnées respectives $(0\,;\,-2)$ et $(2\,;\,0)$.

   Déterminer les nombres réels a et b.

Dans la suite de cet exercice, on admet que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x-2)e^{-x}$.

2. a) Démontrer que, pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x) = (3-x)e^{-x}$.

   b) Étudier le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$.

   c) Établir le tableau de variations de f.

   Dans ce tableau, on ne demande pas de faire figurer les limites.

B. Calcul intégral

On note $I = \displaystyle\int_0^2 f(x)\,dx$.

1. À l'aide d'une intégration par parties, démontrer que $I = -1 - e^{-2}$.
2. a) En déduire la valeur exacte de l'aire S en cm^2 de la partie du plan limitée par les axes de coordonnées et la courbe $\mathcal{C}$ entre les points A et B d'abscisses respectives 0 et 2.

   b) Donner la valeur approchée de S arrondie à 10^{-2}.