CHAPITRE VIII

INTÉGRALES TRIPLES

1 - Définition

Ici, les choses se compliquent car nous ne pouvons représenter graphiquement des fonctions de 3 variables : il faudrait pouvoir travailler en dimension 4...

Retenons malgré tout quelques idées intuitives. DS Une intégrale simple se définit sur un segment (de dimension 1), une intégrale double sur un domaine plan (de dimension 2), alors on devine qu'une intégrale triple sera définie sur un domaine d'un espace de dimension 3.

Cette fois donc, nous allons diviser le domaine $\mathcal{V}$ en petits pavés droits de dimension Δx_i, Δy_j et Δz_k et considérer un point de ce pavé de coordonnées $(\alpha_i, \beta_j, \gamma_k)$.

Pour des Δx_i, Δy_j et $Deltaz_k$ suffisamment petits et des fonctions f suffisamment régulières, la somme

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} \sum_{k=1}^{r} f(\alpha_i, \beta_j, \gamma_k) \times \Delta x_i \times \Delta y_j \times \Delta z_k$$

converge vers un réel qu'on appelle intégrale triple de f sur le domaine $\mathcal{V}$ et qu'on note

$$\iiint_{\mathcal{V}} f(x, y, z)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z$$

2 - Calcul pratique

On utilisera les mêmes techniques que pour l'intégrale double ... et quelques nouvelles

• Sur un parall l pip de

Si $\mathcal{V} = [a\,;b] \times [c\,;d] \times [e\,;h]$, alors

$$\iiint_{\mathcal{V}} f(x, y, z)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z = \int_a^b \left(\int_c^d \left(\int_e^h f(x, y, z)\, \mathrm{d}z \right) \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$$

Exercice 1

Calculez $\mathrm{I} = \displaystyle\iiint_{\mathcal{V}} \frac{zx^2}{1+x^2}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z$ avec $\mathcal{V} = [-1\,;1] \times [0\,;3] \times [1\,;5]$.

Exercice 2

Calculez $\mathrm{J} = \displaystyle\iiint_{\mathcal{V}} xyz\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z$ avec

1. $\mathcal{V}$ l'intérieur du tétraèdre limité par les plans d'équations $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y + z = 1$.

2. $\mathcal{V} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1 - x, 0 \leqslant z \leqslant 1 - x - y\right\}$

• Sur un volume à « bords » parallèles à $(x\mathrm{O}y)$

Si le domaine $\mathcal{V}$ est compris entre les cotes a et b et si les sections « horizontales » de $\mathcal{V}$ ont une surface $\mathrm{S}(z)$ calculable en fonction de la cote z, alors

$$\iiint_{\mathcal{V}} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_a^b \mathrm{S}(z)\,\mathrm{d}z$$

Exercice 3

Calculez le volume de la portion du solide d'équation $z = x^2 + y^2$ située entre le cotes $z = 1$ et $z = 3$.

Exercice 4

On considère la boule de centre O et de rayon 1.

1. On coupe la boule par un plan d'équation $z = a$ avec $0 \leqslant a \leqslant 1$. Calculez le rayon du disque d'intersection en fonction de a.
2. Calculez alors le volume de la portion de boule située entre les plans d'équations $z = 0$ et $z = 1/2$.

• Passage en coordonnées cylindriques

Le passage en coordonnées cylindriques est défini par $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases}$ avec $\theta \in [0, 2\pi]$ et $r > 0$.

On admettra que la formule suivante

Théorème 1 ntégrales triples en coordonnées cylindriques

$$\iiint_{\mathcal{V}} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iiint_{\mathrm{V}} g(r,\theta,z)\,r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z$$

Exercice 5

Calculez $\mathrm{I} = \iiint_{\mathcal{V}} z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ avec

1. $\mathcal{V} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leqslant 9,\ 0 \leqslant z \leqslant 4\right\}$
2. $\mathcal{V} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leqslant z \leqslant 4\right\}$

• Passage en coordonnées sphériques

Le passage en coordonnées cylindriques est défini par $\begin{cases} x = r\cos\varphi\cos\theta \\ y = r\cos\varphi\sin\theta \\ z = r\sin\varphi \end{cases}$ avec $\theta \in [0, 2\pi]$, $\varphi \in \left[-\pi/2, \pi/2\right]$ et $r > 0$.

On admettra que la formule suivante

Théorème 2 ntégrales triples en coordonnées sphériques

$$\iiint_{\mathcal{V}} f(x, y, z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iiint_{\mathrm{V}} h(r, \theta, \varphi) r^2 \cos\varphi\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z$$

Exercice 6

Calculez le volume d'une sphère de centre O et de rayon R.

Exercice 7

Calculez $\mathrm{I} = \iiint_{\mathcal{V}} \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ avec $\mathrm{VR} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid r^2 \leqslant x^2+y^2+z^2 \leqslant \mathrm{R}^2\right\}$

Exercice 8

Calculez $\mathrm{I} = \iiint_{\mathcal{V}} \sqrt{1-(x^2+y^2+z^2)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$

3 - Calcul du moment d'inertie d'un solide

Définition 1 Moment d'inertie par rapport à $(x\mathrm{O}y)$

Si $f(x, y, z)$ est la masse volumique du point de coordonnées (x, y, z) du solide défini par le domaine $\mathcal{V}$, alors

$$\iiint_{\mathcal{V}} z^2 f(x, y, z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

est le moment d'inertie par rapport au plan $(x\mathrm{O}y)$

On obtient des définitions analogues pour les autres plans de coordonnées.

Pour obtenir le moment d'inertie par rapport à l'axe $(\mathrm{O}y)$, on fait la somme des moments par rapport à $(x\mathrm{O}y)$ et $z\mathrm{O}y)$.

Pour obtenir le moment d'inertie par rapport à O, on fait la somme des moments par rapport à aux trois axes de coordonnées.

Exemple Quel est le moment d'inertie d'une boule de centre O et de rayon R par rapport à $(x\mathrm{O}y)$?

$\mathrm{I} = \iint_{\mathcal{V}} z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$

On peut passer en coordonnées cylindriques ou rester en cartésiennes. On modélise la boule en la « découpant » selon des plans parallèles à $(x\mathrm{O}y)$ de cote z. On obtient des disques de rayon r avec $r^2 = \mathrm{R}^2 - z^2$ et donc de surface $\mathrm{S}(z) = \pi(\mathrm{R}^2 - z^2)$.

Alors $\mathrm{I} = \int_{-\mathrm{R}}^{\mathrm{R}} z^2 \mathrm{S}(z)\,\mathrm{d}z = \dfrac{4\pi\mathrm{R}^5}{15}$

Exercice 9

Démontrer que le moment d'inertie par rapport à l'axe de révolution d'un cylindre creux de rayon intérieur r et extérieur R est égal à $\frac{\pi h}{2}(R^4 - r^4)$.

Exercice 10

Démontrer que le moment d'inertie par rapport au plan de la base d'un cylindre de rayon R et de hauteur h est égal à $\frac{\pi R^2 h^3}{3}$.

Exercice 11

Déterminer les moments d'inertie d'un cube par rapport à une face, une arête, un sommet, au centre d'inertie. Vérifier que $I_G = \frac{1}{4} I_O$, $I_{Ox} = \frac{2}{3} I_O$, $I_{xOy} = \frac{1}{3} I_O$.