SGM1 Devoir surveillé de mathématiques n°1

Jeudi 10 novembre 2005

NOM : GROUPE :

L'usage des calculatrices et de la copie du (de la) voisin(e) est interdit

Exercice 1

La fréquence du son fondamental d'une corde vibrante est donnée par la formule

$$N = \frac{1}{2\ell}\sqrt{\frac{F}{\mu}}$$

où ℓ est la longueur de la corde, F sa tension et μ sa masse par unité de longueur.
Donnez l'expression de l'erreur relative $\left|\frac{\mathrm{d}N}{N}\right|_{\max}$ en fonction des erreurs $\mathrm{d}\ell$, $\mathrm{d}F$ et $\mathrm{d}\mu$.

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par

$$f(x) = \operatorname{Arctan}(x) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)$$

1) Calculez $f(1)$.

2) Calculez la dérivée de f sur $]0, +\infty[$.

3) Simplifiez alors l'écriture de $f(x)$.

Exercice 3

Soit f la fonction définie sur $]2, +\infty[$ par

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^3}{x-2}}$$

1) Calculez $\lim_{x \to +\infty} f(x)$

2) Montrez que $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote au voisinage de $+\infty$ dont voous déterminerez une équation.

Exercice 4

En probabilités, la distribution normale est caractérisée par la fonction de densité f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-u^2} \qquad \text{où} \quad u = \frac{x-\mu}{\sigma}$$

la moyenne μ et l'écart-type σ étant considérés comme des constantes positives.

Calculez la dérivée de f et montrez qu'elle est du signe de $-x + \mu$ puis dressez son tableau de variation sur $\mathbb{R}$

Exercice 5

1) Démontrez que $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$.

2) On considère un circuit électrique constitué d'une force électromotrice U, d'une résistance R et d'une inductance L. L'intensité du courant I varie alors en fonction du temps t selon la formule

$$I(R) = \frac{U}{R}\left(1 - e^{-Rt/L}\right)$$

On considère comme des constantes U, L et t et comme seule variable R.
Calculez $\lim_{R \to 0} I(R)$.

Exercice 6

Soit P la fonction définie sur $\mathbb{C}$ par $P(z) = z^3 - 2z^2 + 16$

1) Calulez $P(-2)$ et déduisez-en une première factorisation de $P(z)$.

2) Résolvez alors l'équation $P(z) = 0$.

3) On pose $z_0 = -2(-1+j)$, $z_1 = -2$ et $z_2 = 2+2j$. Écrivez ces trois nombres sous forme exponentielle.

Mini-formulaire

- ▷ Dérivée de Arctan sur $\mathbb{R}$: $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$
- ▷ Définition du nombre dérivé de f en a si f est dérivable en a

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

- ▷ Erreur relative : on rappelle que $\dfrac{\mathrm{d}f}{f} = \mathrm{d}(\ln f)$