∾ Baccalauréat gris foncé ∾
CORRIGÉ

EXERCICE 1 **4 points**

1. a) Il s'agit d'un schéma de Bernoulli : 10 épreuves identiques, indépendantes et à deux issues (avoir ou ne pas avoir de bosse sur la photo).

Il y a 5 lamas sur les 30 animaux : la probabilité de ne pas avoir de bosse sur sa photo est donc de $\dfrac{5}{30}=\dfrac{1}{6}$.
La variable X suit donc la loi binomiale $\mathscr{B}\left(10, 1/6\right)$.
La probabilité cherchée vaut donc

$$\mathbb{P}(X=2)=\binom{10}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^{10-2}=\frac{1953125}{6718464}\simeq 0,29$$

b) $\mathbb{P}(X\geqslant 2)=1-(\mathbb{P}(X=0)+\mathbb{P}(X=1))=1-\left(\left(\dfrac{5}{10}\right)^{10}+\dbinom{10}{1}\left(\dfrac{1}{6}\right)^1\left(\dfrac{5}{6}\right)^{10-1}\right)=\dfrac{10389767}{20155392}\simeq 0,52$

c) $\mathbb{E}(X)=n\times p=10\times\dfrac{1}{6}\simeq 1,67 \qquad \mathbb{V}(X)=n\times p\times(1-p)=\dfrac{25}{18}\simeq 1,39$

2. La variable prend toutes les valeurs entières de 0 à 6.
Il y a $\binom{30}{3}$ possibilités de prendre 3 animaux en photos parmi les 30. On obtient donc successivement

$\mathbb{P}(Y=6)=\dfrac{\binom{15}{3}}{\binom{30}{3}}=\dfrac{13}{116} \qquad \mathbb{P}(Y=5)=\dfrac{\binom{15}{2}\times\binom{10}{1}}{\binom{30}{3}}=\dfrac{15}{58} \qquad \mathbb{P}(Y=4)=\dfrac{\binom{15}{2}\times\binom{5}{1}+\binom{15}{1}\times\binom{10}{2}}{\binom{30}{3}}=\dfrac{60}{203}$

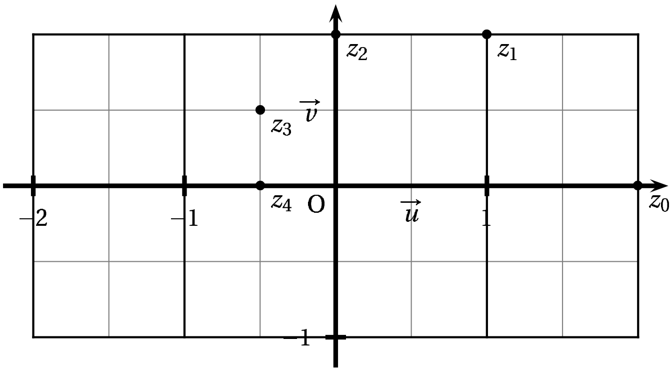
$\mathbb{P}(Y=3)=\dfrac{\binom{15}{1}\times\binom{10}{1}\times\binom{5}{1}+\binom{10}{3}}{\binom{30}{3}}=\dfrac{3}{14} \qquad \mathbb{P}(Y=2)=\dfrac{\binom{15}{1}\times\binom{5}{2}+\binom{10}{2}\times\binom{5}{1}}{\binom{30}{3}}=\dfrac{75}{812} \qquad \mathbb{P}(Y=1)=\dfrac{\binom{10}{1}\times\binom{5}{2}}{\binom{30}{3}}=\dfrac{5}{203}$

$\mathbb{P}(Y=0)=\dfrac{\binom{5}{3}}{\binom{30}{3}}=\dfrac{1}{406}$

On obtient $\mathbb{E}(Y)=4$ et $\mathbb{V}(Y)=\dfrac{45}{29}$

EXERCICE 2 (non spécialistes)

1. $z_0=2,\ z_1=1+\mathrm{i},\ z_2=\mathrm{i},\ z_3=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\mathrm{i}}{2},\ z_4=-\dfrac{1}{2}\in\mathbb{R}$.



2. On a $u_{n+1} = |z_{n+1}| = \left|\dfrac{1+\mathrm{i}}{2}z_n\right| = \left|\dfrac{1+\mathrm{i}}{2}\right| \times |z_n| = \dfrac{1}{\sqrt{2}}u_n$.

L'égalité $u_{n+1} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}u_n$ montre que la suite (u_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. On a $u_0 = |z_0| = |2| = 2$. On sait que $u_n = u_0 \times \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$. Finalement :

$$u_n = 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n.$$

3. On a $\mathrm{OA}_n = |z_n| = u_n$, donc A_n appartient au disque (fermé) decentre O et de rayon 0,1 si et seulement si

$$u_n \leqslant 0,1 \iff 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \leqslant 0,1 \iff 20 \leqslant \left(\sqrt{2}\right)^n \iff 20 \leqslant 2^{\frac{n}{2}} \iff \frac{n}{2}\ln 2 \geqslant \ln 20 \iff n \geqslant \frac{2\ln 20}{\ln 2} \approx 8,6$$

La condition sera donc réalisée la première fois par u_9. On a donc $n_0 = 9$.
La calculatrice livre $u_8 = 0,125$ et$u_9 \approx 0,084 < 0,1$.

4. a) Pour tout naturel n, $u_n \neq 0$ donc $z_n \neq 0$. On peut donc écrire

$$\frac{z_{n+1} - z_n}{z_{n+1}} = \frac{\frac{1+\mathrm{i}}{2}z_n - z_n}{\frac{1+\mathrm{i}}{2}z_n} = \frac{1+\mathrm{i}-2}{1+\mathrm{i}} = \frac{-1+\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}} = \frac{\mathrm{i}(1+\mathrm{i})}{1+\mathrm{i}} = \mathrm{i}$$

.

L'interprétation géométrique de cette égalité est :

– $\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}_{n+1}}, \overrightarrow{\mathrm{A}_n\mathrm{A}_{n+1}}\right) = +\dfrac{\pi}{2}$. Conclusion : pour tout naturel n le triangle $\mathrm{OA}_n\mathrm{A}_{n+1}$ est rectangle en A_{n+1}.

– En modules l'égalité donne $\dfrac{\mathrm{A}_n\mathrm{A}_{n+1}}{\mathrm{OA}_{n+1}} = 1 \iff \mathrm{A}_n\mathrm{A}_{n+1} = \mathrm{OA}_{n+1}$.
Conclusion le triangle $\mathrm{OA}_n\mathrm{A}_{n+1}$ est isocèle en A_{n+1}.
Finalement pour tout naturel n, le triangle $\mathrm{OA}_n\mathrm{A}_{n+1}$ est rectangle isocèle en A_{n+1}, comme on peut le voir sur les quatre premiers triangles de la figure ci-dessus.

b) Comme les triangles sont isocèles $\ell_n = \mathrm{A}_0\mathrm{A}_1 + \mathrm{A}_1\mathrm{A}_2 + \ldots + \mathrm{A}_{n-1}\mathrm{A}_n = \mathrm{OA}_1 + \mathrm{OA}_2 + \cdots + \mathrm{OA}_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$.
Cette somme est la somme de n premiers termes d'une suite géométrique de premier terme $u_1 = \sqrt{2}$ et de raison $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

On a donc $\ell_n = \sqrt{2}\dfrac{1 - \frac{1}{\sqrt{2}^n}}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}} = \dfrac{\sqrt{2}\left(\sqrt{2}^n - 1\right)}{\sqrt{2}^{n-1}(\sqrt{2}-1)}$.

Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{2}^n - 1}{\sqrt{2}^{n-1}} = \sqrt{2}$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \ell_n = \frac{2}{\sqrt{2}-1}.$$

EXERCICE 2 (spécialité)

1. La transformation f est de la forme $z' = az + b$ avec $a \in \mathbb{C}$, $b \in \mathbb{C}$: c'est donc une similitude.
Cherchons son centre Ω invariant par f :
$z_\Omega = \left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\mathrm{i}\right)z_\Omega + 1 \iff z_\Omega\left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\mathrm{i}\right) = 1 \iff z_\Omega(1-\mathrm{i}) = 2 \iff z_\Omega = \dfrac{2}{1-\mathrm{i}} = 1 + \mathrm{i}$.
Le centre de la similitude est donc Ω d'affixe $1+\mathrm{i}$.
Les deux égalités $z' = \left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\mathrm{i}\right)z + 1$ et $1 + \mathrm{i} = \left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\mathrm{i}\right)(1+\mathrm{i}) + 1$ entraînent par différence :

$z' - (1+\mathrm{i}) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}\right)[z - (1+\mathrm{i})]$.

Or $\left|\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}\right| = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Donc $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i} = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$. L'écriture de la similitude est donc finalement :

$$\boldsymbol{z' - (1+\mathrm{i}) = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}[z - (1+\mathrm{i})].}$$

On reconnaît la composée (dans n'importe quel ordre)
- d'une rotation de centre Ω et d'angle $\frac{\pi}{4}$;
- d'une homothétie de centre Ω et de rapport $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

2. a) Les affixes sont respectivement : 0 ; 1 ; $\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}$; $\frac{3}{2} + \mathrm{i}$.

b) On a $u_n = \Omega\mathrm{A}_n = |z_n - z_\Omega|$.
Or d'après la question 1., $z_{n+1} - z_\Omega = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}[z_n - z_\Omega]$, soit en prenant les modules :
$|z_{n+1} - z_\Omega| = \left|\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}[z_n - z_\Omega]\right| = \left|\frac{1}{\sqrt{2}}\right| \times \left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\right| \times |z_n - z_\Omega| = \frac{1}{\sqrt{2}} \times 1 \times |z_n - z_\Omega|$, ou encore $u_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{2}}u_n$, égalité qui montre que la suite (u_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{\sqrt{2}}$, de premier terme $u_0 = \Omega\mathrm{A}_0 = \Omega\mathrm{O} = \sqrt{2}$ (diagonale d'un carré de côté 1).
Il en résulte que$u_n = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$.

c) D'après l'expression de u_n, tous les termes de la suite sont non nuls et $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\sqrt{2}}{2} < 1$: la suite est donc décroissante.
Donc s'il existe n_0 tel que $u_{n_0} < 0,1$, tous les termes successifs vérifieront aussi cette inégalité.
Or $u_{n_0} < 0,1 \iff \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n_0} < 0,1 \iff \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n_0-1} < 0,1$, d'où d'après la croissance de la fonction logarithme népérien, $-(n_0-1)\ln\sqrt{2} < -\ln 10 \iff \ln 10 < (n_0-1)\ln\sqrt{2} \iff \frac{\ln 10}{\ln\sqrt{2}} < n_0 - 1 \iff n_0 > 1 + \frac{\ln 10}{\ln\sqrt{2}} \approx 7,6$.
Conclusion : le premier point appartenant au disque de centre Ω et de rayon 0,1 est le point A_8.

3. a) Le triangle $\Omega\mathrm{A}_0\mathrm{A}_1$ est clairement rectangle isocèle en A_1.
Démontrons par récurrence que le triangle $\Omega\mathrm{A}_n\mathrm{A}_{n+1}$ est rectangle isocèle en A_{n+1} :
- La propriété est initialisée pour $n = 0$.
- Supposons que le triangle $\Omega\mathrm{A}_{n-1}\mathrm{A}_n$ soit rectangle isocèle en A_n. Or le triangle $\Omega\mathrm{A}_n\mathrm{A}_{n+1}$ est tout simplement l'image par la simitude du triangle $\Omega\mathrm{A}_{n-1}\mathrm{A}_n$: il est donc de même nature, soit rectangle isocèle en A_{n+1}.
  La démonstration par récurrence est achevée.

b) D'après la question précédente $\ell_n = \mathrm{A}_0\mathrm{A}_1 + \cdots + \mathrm{A}_{n-1}\mathrm{A}_n = \Omega\mathrm{A}_1 + \Omega\mathrm{A}_2 + \cdots + \Omega\mathrm{A}_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$, soit la somme des n premiers termes (exception faite de u_0) de la suite géométrique vue ci-dessus.
On a donc $\ell_n = 1 \times \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n - 1}{\frac{1}{\sqrt{2}} - 1}$.
Comme $\frac{1}{\sqrt{2}} < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n = 0$.
Conclusion : $\lim\limits_{n\to+\infty} \infty_n = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}$ $=\mathbf{2} + \boldsymbol{\sqrt{2}}$.

EXERCICE 3

Partie A

1. $M(x\,;\,y\,;\,z) \in \Delta \iff$ il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{IM} = \lambda\overrightarrow{n}$, car on sait que $\overrightarrow{n}$ est un vecteur normal au plan P. On a donc

$$\begin{cases} x - x_1 &= \lambda a \\ y - y_1 &= \lambda b \\ z - z_1 &= \lambda c \end{cases} \iff \begin{cases} x &= x_1 + \lambda a \\ y &= y_1 + \lambda b \\ z &= z_1 + \lambda c \end{cases}$$

qui est une équation paramétrique de la droite Δ.

2. D'après la question 1, H est un point de Δ, il vérifie donc lui aussi la relation de colinéarité :

$$\overrightarrow{IH} = k\overrightarrow{n},\ \text{avec } k \in \mathbb{R}.$$

3. On a donc $\begin{cases} x_H &= x_1 + ka \\ y_H &= y_1 + kb \\ z_H &= z_1 + kc \end{cases}$ mais comme H appartient au plan P, ses coordonnées vérifient l'équation du plan soit $a(x_1 k + a) + b(y_1 + kb) + c(z_1 + kc) + d = 0 \iff k\left(a^2 + b^2 + c^2\right) + ax_1 + by_1 + cz_1 + d = 0 \iff k = -\dfrac{ax_1 + by_1 + cz_1 + d}{a^2 + b^2 + c^2}$ (car a, b et c ne sont pas simultanément nuls).

4. La relation vectorielle $\overrightarrow{IH} = k\overrightarrow{n}$ entraîne l'égalité des normes :

$$IH = |k|\left\|\overrightarrow{n}\right\| = \frac{\left|ax_1 + by_1 + cz_1 + d\right|}{a^2 + b^2 + c^2} \times \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \frac{\left|ax_1 + by_1 + cz_1 + d\right|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

.

Partie B

1. On applique la partie A avec $I = \Omega$ et H point commun au plan $\mathscr{Q}$ et au plan P, le rayon de la spère est donc $IH = \Omega H = \dfrac{|1 \times 1 - 1 \times (-1) + 1 \times 3 - 11|}{\sqrt{1 + 1 + 1}} = \dfrac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$.
2. Un système d'équations paramétriques de la droite Δ est :

$$\begin{cases} x &= 1 + \lambda \\ y &= -1 - \lambda \\ z &= 3 + \lambda \end{cases}$$

3. En reportant ces coordonnées dans l'équation de $\mathscr{Q}$ on obtient $1 + \lambda + 1 + \lambda + 3 + \lambda - 11 = 0 \iff 3\lambda - 6 = 0 \iff \lambda = 2$.
En reportant cette valeur dans les équations paramétriques de la droite Δ on obtient :
$x = 3$; $y = -3$; $z = 5$. Le point commun à la sphère et au plan a pour coordonnées (3 ; - 3 ; 5).

EXERCICE 4

Partie A

1. $f(0) = e^0 = 1$ et $g(0) = 0\,e^0 = 0$ donc l'identification est immédiate.
2. f et g sont paires (sans difficulté)
3. $\boldsymbol{f'(x) = -2x}$ et $g'(x) = (2x - 2x^3) = \boldsymbol{2x(1 - x^2)}$ On obtient sans difficulté que
   - ▷ **f strictement croissante sur** $]-\infty; 0]$ **et strictement décroissante sur** $[0; +\infty[$

- ▷ **g strictement croissante sur** $]-\infty;-1]$ **et sur [0 ; 1] ; g strictement décroissante sur [-1 ; 0] et sur** $[1;+\infty[$
- ▷ $\lim\limits_{X\to-\infty} e^{X} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$
- ▷ $g(x) = \dfrac{1}{\frac{e^{x^2}}{x^2}}$ or $\lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{e^{X}}{X} = +\infty$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$.

4. $f(x) - g(x) = (1 - x^2)$ Donc :
- **C_f est en dessous de C_g lorsque $x < 1$ et lorsque $x > 1$**
- **C_f est au-dessus de C_g lorsque $-1 < x < 1$**
- **C_f coupe C_g aux points $I(-1\,;e^{-1})$ et $J(1\,;e^{-1})$**

Partie B

1. G est **la primitive de g qui s'annule en 0**
2. Pour $x > 0$, $G(x)$ est **l'aire du domaine situé entre l'axe des abscisses, la courbe C_g, l'axe des ordonnées et la droite verticale d'équation $X = x$**
3. G est une primitive de g donc G' = g ; or g est strictement positive sur $\mathbb{R}^*$ et nulle en 0 donc **G est strictement croissante sur $\mathbb{R}$**
4. G' $(x) = g(x)$ et d'autre part soit $H : x \mapsto \frac{1}{2}\left(F(x) - xe^{-x^2}\right)$

$$\begin{aligned} H'(x) &= \frac{1}{2}\left(F'(x) - e^{-x^2} + 2x^2e^{-x^2}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(f(x) + (2x^2-1)e^{-x^2}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(2x^2e^{-x^2}\right) \\ &= g(x) \\ &= G'(x) \end{aligned}$$

On a donc **G' = H'** donc G = H + constante

Or $G(0) = 0$ et $H(0) = [F(0) - 0] = 0$ donc la constante est nulle et, pour tout réel x, $G(x) = H(x) = \frac{1}{2}\left(F(x) - xe^{-x^2}\right)$

5. a) $G(x) = H(x) = \frac{1}{2}\left(F(x) - \frac{g(x)}{x}\right)$, or $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = \ell$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$, donc

$$\lim_{x\to+\infty} G(x) = \frac{1}{2}\ell$$

b) **N représente l'aire comprise entre les courbes C_g , C_f , l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$**

c) cf dessin : $N + \frac{1}{2}I_2 = \ell$; $I_3 = \frac{1}{2}\ell$ et $I_2 < I_3$ donc $\ell - I_2 > \ell - I_3$ c'est-à - dire $N > \frac{1}{2}\ell$