BACCALAURÉAT BLANC

Session 2008

MATHÉMATIQUES

Série S

Enseignement de spécialité

Durée de l'épreuve : 4 heures

Coefficient : 9

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées conformément à la loi en vigueur.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants.
Le candidat doit traiter tous les exercices.
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 4 pages numérotées de 1 à 4.

EXERCICE 1 (5 points)

Un employé se rend à son travail. S'il est à l'heure il prend le bus de ramassage gratuit mis à disposition par l'entreprise, s'il est en retard il prend le bus de la ville et il lui en coûte 1,50 €.

Si l'employé est à l'heure un jour donné, la probabilité qu'il soit en retard le lendemain est $\frac{1}{5}$, s'il est en retard un jour donné la probabilité qu'il soit en retard le lendemain est $\frac{1}{20}$.

Pour tout entier naturel non nul n, on appelle R_n l'évènement : « l'employé est en retard le jour n ».

On note p_n, la probabilité de R_n et q_n, celle de $\overline{\mathrm{R}_n}$. On suppose que $p_1 = 0$.

1. Détermination d'une relation de récurrence.

a) Déterminer les probabilités conditionnelles $p_{\mathrm{R}_n}(\mathrm{R}_{n+1})$ et $p_{\overline{\mathrm{R}_n}}(\mathrm{R}_{n+1})$.

b) Déterminer $p(\mathrm{R}_{n+1} \cap \mathrm{R}_n)$ en fonction de p_n et $p\left(\mathrm{R}_{n+1} \cap \overline{\mathrm{R}_n}\right)$ en fonction de q_n

c) Exprimer p_{n+1} en fonction de p_n et de q_n.

d) En déduire que $p_{n+1} = \frac{1}{5} - \frac{3}{20}p_n$.

2. Étude de la suite (p_n).

Pour tout entier naturel non nul n, on pose $v_n = p_n - \frac{4}{23}$.

a) Démontrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $-\frac{3}{20}$.

b) Exprimer v_n puis p_n en fonction de n.

c) Justifier que la suite (p_n) est convergente et calculer sa limite.

EXERCICE 2 (5 points)

L'exercice comporte une annexe, à rendre avec la copie.

A et C sont deux points distincts du plan ; on note Γ le cercle de diamètre [AC] et O le centre de Γ ; B est un point du cercle Γ distinct des points A et C.

Le point D est construit tel que le triangle BCD soit équilatéral direct ; on a donc

$$\left(\overrightarrow{\mathrm{BC}}, \overrightarrow{\mathrm{BD}}\right) = +\frac{\pi}{3} \quad [2\pi]$$

Le point G est le centre de gravité du triangle BCD.

Les droites (AB) et (CG) se coupent en un point M.

Partie A

1. Placer les points D, G et M sur la figure de la feuille annexe.

2. Montrer que les points O, D et G appartiennent à la médiatrice du segment [BC] et que le point G est le milieu du segment [CM].

3. Déterminer l'angle et le rapport de la similitude directe s de centre C transformant B en M.

Partie B

Dans cette question, le plan est muni d'un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}; \vec{u}, \vec{v}\right)$ choisi de telle sorte que les points A et C aient pour affixes respectives -1 et 1.

Soit E le point construit pour que le triangle ACE soit équilatéral direct ; on a donc

$$\left(\overrightarrow{\mathrm{AC}}, \overrightarrow{\mathrm{AE}}\right) = +\frac{\pi}{3} \quad [2\pi]$$

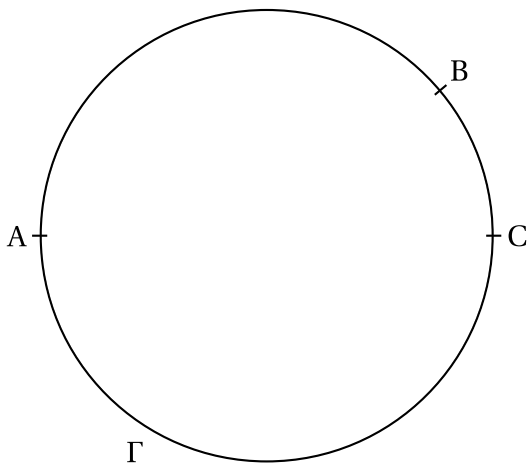
1. Calculer l'affixe du point E et construire le point E sur la feuille annexe.

2. Soit σ la similitude directe d'expression complexe $z' = \dfrac{3+\mathrm{i}\sqrt{3}}{4}z + \dfrac{1-\mathrm{i}\sqrt{3}}{4}$.
Déterminer les éléments caractéristiques de σ et en déduire que σ est la similitude réciproque de s.

3. Montrer que l'image E′ du point E par σ a pour affixe $-\dfrac{1}{2}+\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et montrer que le point E′ appartient au cercle Γ.

4. On note $\mathscr{C}$ le lieu des points M lorsque le point B décrit le cercle Γ privé des points A et C.
Montrer que le point E appartient à $\mathscr{C}$.
Soit O′ l'image du point O par la similitude s. Démontrer que le point O′ est le centre de gravité du triangle ACE.
En déduire une construction de $\mathscr{C}$.

Annexe spécialité



EXERCICE 3 (5 points)

1. Restitution organisée de connaissance

Prérequis : pour tous réels strictement positifs a et b, $\ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b)$

a) Montrez que $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$

b) Déduisez-en que $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$

2. a) Soit u la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2-u_n} \end{cases}$ pour tout entier naturel n

i) Calculer u_1, u_2 et u_3. On exprimera chacun de ces termes sous forme d'une fraction irréductible.

ii) Comparer les quatre premiers termes de la suite u aux quatre premiers termes de la suite w définie sur $\mathbb{N}$ par $w_n = \dfrac{n}{n+1}$.

iii) À l'aide d'un raisonnement par récurrence, démontrer que, pour tout entier naturel n, $u_n = w_n$.

b) Soit v la suite de terme général v_n défini par $v_n = \ln\left(\dfrac{n}{n+1}\right)$ où ln désigne la fonction logarithme népérien.

i) Montrer que $v_1 + v_2 + v_3 = -\ln 4$.

ii) Soit S_n la somme définie pour tout entier naturel non nul n par :

$$\text{S}_n = v_1 + v_2 + \cdots + v_n.$$

Exprimer $\text{S}_n$en fonction de n.
Déterminer la limite de S_n lorsque n tend vers $+\infty$.

EXERCICE 4 (5 points)

On considère la fonction numérique g définie sur $[0\,;\,1]$ par :

$$g(t) = \begin{cases} (1-\text{e}^{-t})\ln(t) \quad \text{pour} \quad 0 < t \leqslant 1 \\ 0 \quad \text{sinon} \end{cases}$$

1. Démontrez que $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{1-\text{e}^{-t}}{t} = 1$.

2. Démontrez que g est continue sur $[0\,;\,1]$.

3. Étudiez la dérivabilité de g sur $[0\,;\,1]$ et démontrez que pour tout réel t de $]0\,;\,1]$:

$$g'(t) = \frac{\text{e}^{-t}}{t}\left(t\ln(t) + \text{e}^{t} - 1\right)$$

4. Soit f la fonction définie sur $]0\,;\,1]$ par

$$f(t) = t\ln(t) + \text{e}^{t} - 1$$

a) Étudiez le sens de variation de f sur $]0\,;\,1]$. Vous étudierez f' aux bornes de $]0\,;\,1]$.

b) Montrez que f' s'annule une seule fois sur $]0\,;\,1]$ en un réel t_0 que vous ne chercherez pas à calculer.

c) Étudiez le signe de f' et le sens de variation de f sur $]0\,;\,1]$.

d) Déduisez-en que f s'annule une seule fois sur $]0\,;\,1]$ pour une valeur t_1 qu'on ne cherchera pas à calculer.

5. Terminez l'étude de g et dressez son tableau de variation.

6. Tracez sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(\text{O}; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ d'unité 6 cm. Vous tracerez en particulier la tangente à la courbe au point d'abscisse 0. Vous admettrez que $t_1 \approx 0,31$.