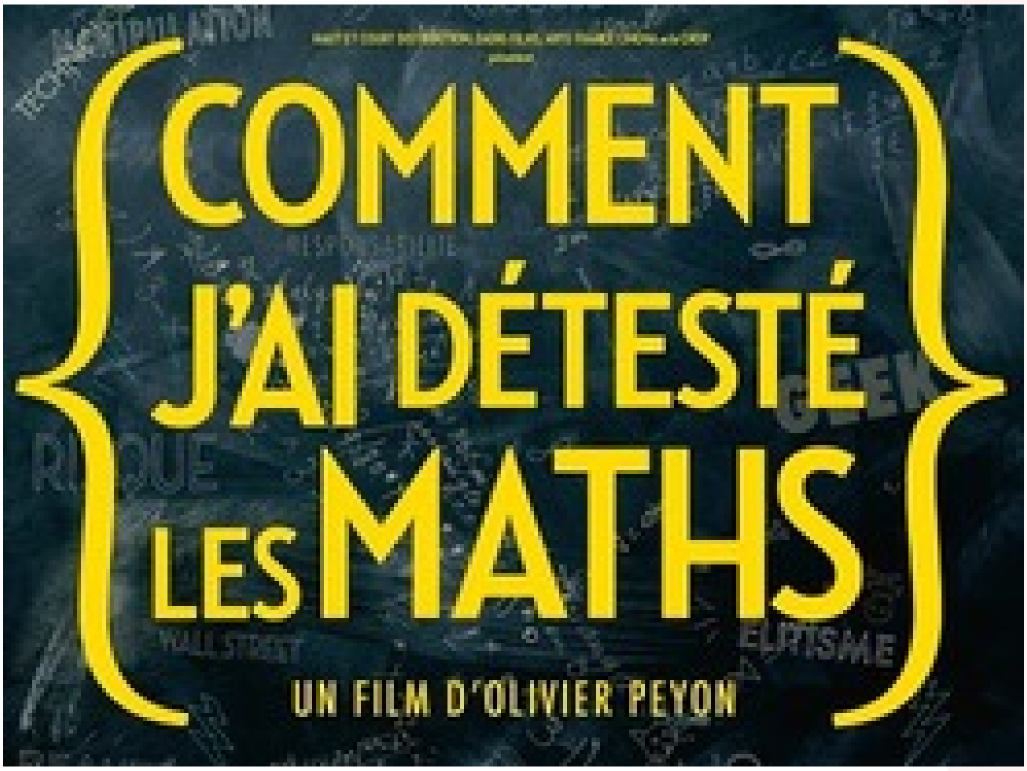
Mathématiques

2^{ale}5 / 2018-2019

Mis à jour le 17 novembre 2018 à 22:20

Une année de mathématiques en 2nde



Notre Dame LYCÉES Rezé

Guillaume CONNAN

THÈME N° 4

Fonctions

À la fin de ce chapitre, vous devez être capable de :

— traduire le lien entre deux quantités par une formule ;

— pour une fonction définie par une courbe, un tableau de données ou une formule :

  — identifier la variable et, éventuellement, l'ensemble de définition ;

  — déterminer l'image d'un nombre ;

  — rechercher des antécédents d'un nombre ;

— résoudre graphiquement des inéquations de la forme : $f(x) < k$; $f(x) < g(x)$.

1 Teaser...

1 1 Suivez la flèche

Pour définir une fonction, il faut un ensemble de départ et un ensemble d'arrivée. Une fonction associe à chaque élément de l'ensemble de départ AU PLUS UN ÉLÉMENT de l'ensemble d'arrivée.
En fait, une fonction c'est une *flèche* entre deux ensembles...

Exemple

Un exemple de fonction

1 2 In English

Les Euromaths vont traduire :)

> *Loosely speaking, a function is a rule that, for each element in some set D of possible inputs, assigns a possible output. The output is said to be the image of the input under the function and the input is a pre-image of the input. The set D of possible inputs is called the domain of the function.*
> *For a function named* f*, the image of* q *under* f *is denoted by* $f(q)$*, we say that q maps to r under f. The notation for « q maps to r » is* $q \mapsto r$.
> *It is convenient when specifying a function to specify a co-domain for the function. The co-domain is a set for which the function's output values are chosen.*
> *The notation*
>
> $$f : D \mapsto F$$
>
> *means that* f *is a function whose domain is the set D and whose co-domain (the set of possible outputs) is the set F. More briefly « a function from D to F » or « a function that maps D to F »*

1 3 Les fonctions en informatique

1 4 Une fonction qui existe déjà

Par exemple, il existe une fonction Python qui prend en entrée un mot ou une phrase (ou plutôt une *chaîne de caractère* ou *string*) et renvoie sa longueur. Il s'agit de la fonction `len` :

```
In [13]: len("abcd")
Out[13]: 4

In [14]: len("")
Out[14]: 0

In [15]: len("I love Maths")
Out[15]: 12
```

Le domaine de `len` est l'ensemble des objets de type *string* et le co-domaine est l'ensemble des entiers positifs.

$$\mathrm{len} : \mathrm{String} \mapsto \mathrm{PositiveInteger}$$

1 5 Créons une fonction simple

On peut créer ses propres fonctions. Par exemple, créons une fonction qui prend en entrée le rayon d'une sphère et renvoie une approximation de son volume.On doit faire attention : le rayon doit être positif :

```
def vol_sphere(rayon:float) -> float:
    assert rayon >0, "Le rayon doit être positif !"
    pi = 3.1415926
    return 4*pi*rayon/3
```

Alors par exemple :

```
In [3]: vol_sphere(10)
Out[3]: 41.88790133333333

In [4]: vol_sphere(-3)
---------------------------------------------------------------------------
AssertionError: Le rayon doit être positif !
```

Le domaine de `vol_sphere` est l'ensemble des nombres à virgules flottantes positifs et le co-domaine aussi.

$$\mathit{vol\_sphere} : \mathtt{float} \mapsto \mathtt{float}$$

1 6 Créons une fonction un peu plus compliquée

Créons maintenant une fonction qui prend les longueurs des côtés d'un triangle et vérifie si ce triangle est rectangle. Il suffit d'utiliser la réciproque du théorème de Pythagore. On va tester si le carré de l'un est égal à la somme des carrés des deux autres.
Comme on crée une fonction qui doit...fonctionner pour des nombres rentrés dans n'importe quel ordre.On va donc tester les trois égalités possibles.
La fonction doit nous renvoyer « Vrai » ou « Faux ». Il existe un type particulier pour ça : le type `boolean` qui ne contient que deux éléments : `true` et `false`.
On doit rentrer le plus grand côté en premier,sinon on renvoie un message d'erreur.
Ensuite on teste si l'égalité de Pythagore est vérifiée. On teste une égalité avec == :

```
def est_rectangle(hypo:int, c1:int, c2:int) -> bool:
    assert hypo > c1 and hypo > c2, "le plus grand côté doit être rentré en premier"
    return hypo**2 == c1**2 + c2**2
```

Alors :

```
In [76]: est_rectangle(5,4,3)
Out[76]: True

In [77]: est_rectangle(5,4,2)
Out[77]: False

In [78]: est_rectangle(10,8,6)
Out[78]: True
```

Mais :

```
In [79]: est_rectangle(3,4,5)
---------------------------------------------------------------------------

AssertionError: le plus grand côté doit être rentré en premier
```

2 Qu'est-ce qu'une fonction ?

Mathémator : ce nom vous est familier...

Secondix: oui ! Au Collège, nous avons étudié les fonctions linéaires et les fonctions affines. Ça parle de droites, c'est ça ?

Mathémator : mmmmouais... Il va falloir reprendre depuis le début ! Alors ouvrez un dictionnaire pour y regarder la définition de *fonction*.

Secondix: Ouh la la ! Il y en a des tonnes.

Mathémator : Regardez le quatrième paragraphe.

Secondix: alors...

> **4. FONCTION** n.f. (de *fonction 1 ; 1692*) **1.** *Math.* Grandeur variable dont la valeur dépend de celle qui est attribuée à une autre variable, dite *variable indépendante*. - **2.** (1890) *Être fonction de* , dans la langue usuelle, se dit d'une chose dont la nature, le rôle, etc. dépendant d'une autre chose : *Le développement de l'enfant est fonction de l'établissement des connexions nerveuses*.)

Mathémator : Arrêtons-nous là ! Ces dates montrent que la notion mathématique date de la fin du XVII[e] siècle (voir le petit aparté historique page 60) et que cette notion est entrée dans la langue usuelle deux siècles plus tard.

Secondix: une notion mathématique est passée dans le langage courant !

Mathémator : c'est en effet une notion assez naturelle : il est facilement compréhensible que la taille d'un enfant varie *en fonction de* son âge, que l'on prépare sa valise *en fonction de* la destination de son voyage, que la consommation d'une voiture varie *en fonction de* sa vitesse, etc.

D'ailleurs, nous ne donnerons pas une définition mathématiquement rigoureuse d'une fonction. Pour cela, il aurait fallu être habitué à la notion de *relation* entre des ensembles : vos parents y avaient été initiés dès la maternelle... En parler maintenant risquerait de vous traumatiser durablement.

Secondix: vous croyez que je suis plus bête que mes parents, c'est ça ?...

Mathémator : loin de moi cette idée. Le contenu des enseignements ayant changé, il faut adapter nos travaux d'approche. Nous reviendrons d'ailleurs à la notion originale, celle de Leibniz, celle d'action, de mécanisme, de fonctionnement, de dépendance, bref une notion dynamique.

Définition 4 - 1

Fonction numérique d'une variable réelle
On appelle fonction numérique d'une variable réelle un « mécanisme mathématique » qui, à tout nombre appartenant à un certain ensemble appelé **domaine de définition de la fonction**, associe un nouveau nombre, appelé **image** du nombre initial.

Lagrange présenta cette idée d'une manière un peu plus sophistiquée comme nous pouvons le découvrir sur le texte de la figure suivante :

PREMIÈRE PARTIE.

EXPOSITION DE LA THÉORIE, AVEC SES PRINCIPAUX USAGES DANS L'ANALYSE.

CHAPITRE PREMIER.

DÉVELOPPEMENT EN SÉRIE D'UNE FONCTION D'UNE VARIABLE LORSQU'ON ATTRIBUE UN ACCROISSEMENT A CETTE VARIABLE. FORMATION SUCCESSIVE DES TERMES DE LA SÉRIE. THÉORÈME IMPORTANT SUR LA NATURE DE CES SÉRIES.

1. Nous désignerons en général par la caractéristique f ou F, placée devant une variable, toute fonction de cette variable, c'est-à-dire toute quantité dépendante de cette variable et qui varie avec elle suivant une loi donnée. Ainsi $f(x)$ ou $F(x)$ désignera une fonction de la variable x ; $f(x^2)$, $f(a+bx)$, ... désigneront des fonctions de x^2, de $a+bx$, ..

Pour marquer une fonction de deux variables indépendantes, comme de x, y, nous écrirons $f(x, y)$, et ainsi des autres.

Nous ne pouvons vraiment définir la notion de « mécanisme » mais elle est assez parlante pour vous aider à comprendre ce qu'est une fonction.

Exemple

Considérons par exemple la fonction qui à tout nombre réel associe le carré de son double auquel on ajoute dix-huit. Calculez les images de 7, $-\frac{5}{2}$, $\sqrt{3}$.

Secondix: voyons si j'ai bien compris : je pars de 7, je prends son double, c'est-à-dire 14, je l'élève au carré ce qui donne 196 puis j'ajoute 18 et j'obtiens 214. L'image de 7 par cette fonction est donc 214.

Mathémator : parfait ! Il ne reste plus qu'à traiter les autres cas.

Secondix: pas de problème !

- ....
- ....
- ....
- ....

Mathémator : nous avons ici défini une fonction qui transforme n'importe quel nombre réel en un autre suivant un mécanisme décrit par une phrase.
Nous pouvons également décrire cette fonction en utilisant des notations mathématiques utilisées depuis qu'elles ont été introduites par LAGRANGE.
Détaillons *algébriquement* la transformation d'un nombre quelconque n :

- on prend le double de n qui devient donc $2n$;
- on élève ce double au carré : on obtient $(2n)^2$;
- on ajoute au nombre précédent 18 : on obtient finalement $(2n)^2 + 18$.

Ainsi, la fonction étudiée transforme un nombre réel quelconque n en $(2n)^2 + 18$.
Donnons un nom à cette fonction, par exemple φ.

Secondix: c'est quoi cette lettre ?

Mathémator : c'est la lettre grecque « phi »... comme fonction. Le choix de la lettre n'est pas important. On prend celle qu'on veut. On peut se mettre d'accord si vous voulez d'utiliser des lettres grecques pour les fonctions pour les distinguer des nombres désignés par des lettres romaines mais ce n'est pas obligatoire et il n'existe aucune règle générale. Sachez que quand LAGRANGE a introduit ses notations, il a utilisé f pour la fonction et x pour la variable et que cette habitude est restée mais ce n'est qu'une habitude.

Secondix: vous savez, moi et l'alphabet grec....

Mathémator : α β γ δ ε ζ η θ ι κ λ μ ν ξ o π ρ σ τ υ φ χ ψ ...

Revenons à notre problème. Il est d'usage d'écrire :

$$\varphi \ : \ n \longmapsto (2n)^2 + 18$$

la petite flèche traduisant l'idée dynamique de transformation d'un nombre en un autre. Notez que cette flèche commence avec un petit trait vertical. C'est une habitude pour la distinguer des autres types de relations désignés par des flèches.
On peut aussi préciser les ensembles avec lesquels on travaille :

$$\varphi : \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \longrightarrow & [0, +\infty[\\ n & \longmapsto & \varphi(n) = (2n^2) + 18 \end{array}$$

qui se lit : « la fonction φ qui va de $\mathbb{R}$ dans l'intervalle $[0, +\infty[$ et qui à un nombre n associe le nombre $(2n)^2 + 18$.

Voici une variante :

$$n \overset{\varphi}{\longmapsto} (2n)^2 + 18$$

On a plutôt l'habitude d'écrire :

$$\varphi(n) = (2n)^2 + 18$$

Le « $\varphi(n)$ » se lisant « phi de n » et désignant l'image du nombre n par la fonction φ. Il ne faudra surtout pas confondre cette écriture avec une quelconque multiplication de φ par n. J'avoue que l'écriture est ambiguë mais le contexte nous permettra de distinguer les cas.
Par exemple, ici, on peut noter :

$$\varphi \ : \ 7 \longmapsto 214$$

ou

$$7 \overset{\varphi}{\longmapsto} 214$$

ou encore

$$\varphi(7) = 214$$

Avec Python :

```
def phi(n:float) -> float:
    return (2*n)**2 + 18

In [1]: phi(7)
Out[1]: 214
```

Faites de même avec les deux autre exemples.

Idée

Un peu d'histoire...
D'abord une date : 1692. C'est en effet cette année-là que Wilhelm Leibniz(1646-1716) introduisit officiellement le terme de *fonction* du latin *functio* : accomplissement, exécution qui a donné en français *fonctionnement*. La notation que nous utilisons actuellement, à savoir $f(x)$ qui désigne l'image de x par la fonction f a été introduite un siècle plus tard par Joseph-Louis de Lagrange (1736-1813) dans sa « Théorie des fonctions analytiques » parue en 1797 dont vous pouvez voir un extrait à la page précédente.
Pendant longtemps, $f(x)$ désigna aussi bien une fonction que l'image d'un nombre x par cette fonction. À partir de 1940, suite au travail du groupe de mathématiciens français Bourbaki, c'est f qui désigne la fonction et $f(x)$ ne désigne que l'image de x par la fonction f.
Au lieu de $f(x)$, on notait souvent avant Lagrange f_x l'image de x par la fonction f. Cette notation est restée aujourd'hui pour désigner un cas particulier de fonctions, les suites, que vous étudierez en classe de 1ère .

Mathémator : avec nos notations, nous pouvons réécrire notre définition et préciser quelques notations :

Définition 4 - 2

Fonction : notation et vocabulaire
Soit $\mathcal{D}_\varphi$ un ensemble. Une fonction φ est un « mécanisme mathématique » qui à tout nombre n appartenant à $\mathcal{D}_\varphi$ associe le nombre $\varphi(n)$ appelé **image** de n par φ.
On note :

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathcal{D}_\varphi & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ n & \longmapsto & \varphi(n) \end{array}$$

On appelle $\mathcal{D}_\varphi$ l'**ensemble de définition** de φ.
Le nombre n est **UN antécédent** de $\varphi(n)$ par φ.

3 Différentes représentations d'une fonction

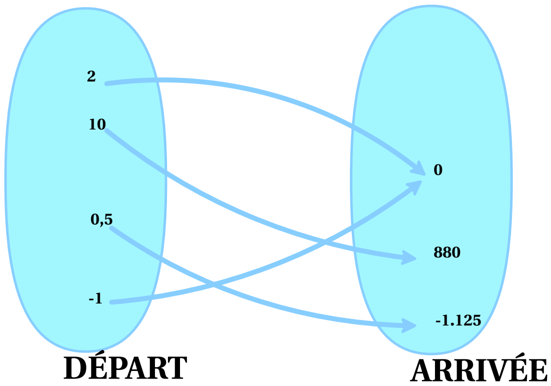
Étudions cette fois la fonction ψ qui à un nombre n associe $n \cdot (n+1) \cdot (n-2)$:

$$\psi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & [0\,;+\infty[\\ n & \mapsto & n \cdot (n+1) \cdot (n-2) \end{array}$$

Par exemple, $\psi(2) =$ ......, $\psi(0,5) =$ ......, $\psi(-2) =$ ......

3 1 Diagramme sagittal

On peut représenter la situation à l'aide d'un *diagramme sagittal* :



Alors :

2 a pour image ....
-1 a pour image ....
$0,5$ a pour image ....
-2 a pour image ....

880 a pour antécédent ....
$-1,125$ a pour antécédent ....
0 a pour antécédent ....

3 2 Tableau de valeurs

On aurait pu opter pour un *tableau de valeurs* :

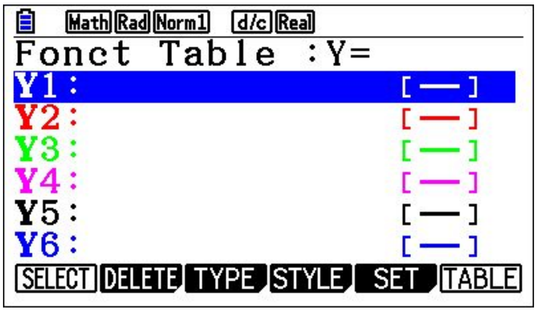
n	-3	-2	-1	0	1	2	3
$\psi(n)$							

3 3 Utilisation de la machine

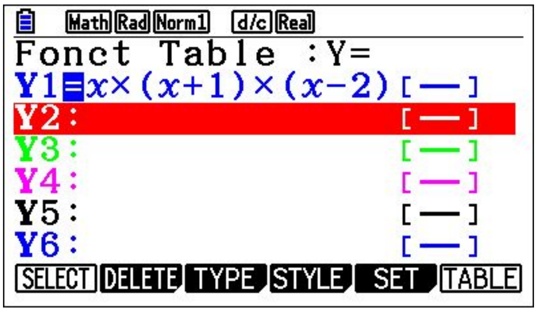
Ici les calculs peuvent être effectués de tête mais dans certains cas l'usage de la machine rendra bien des services.
Comment obtenir le tableau ci-dessus avec une CASIO ou une TI ?

3 3 1 Avec les CASIO

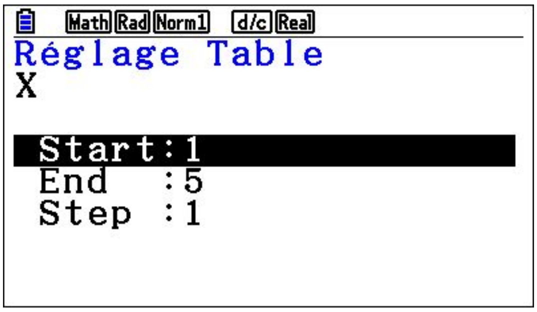
On va sur le menu TABLE.



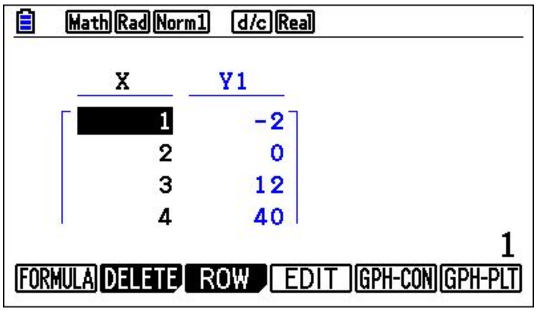
On rentre Y= X,θ,T (X,θ,T + 1) (X,θ,T − 2)



On tape sous SET sur la touche F5 pour régler le début, la fin et le pas de la table :

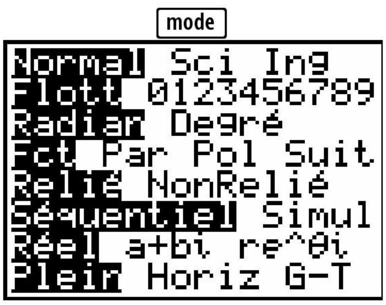


On sort avec EXIT



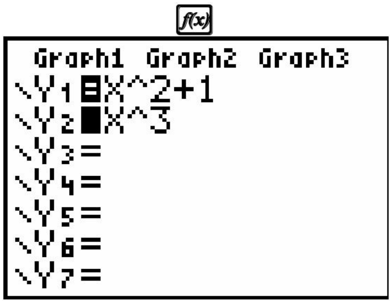
3 3 2 Avec les TI

Vérifier que vous êtes dans le bon mode en tapant sur mode :



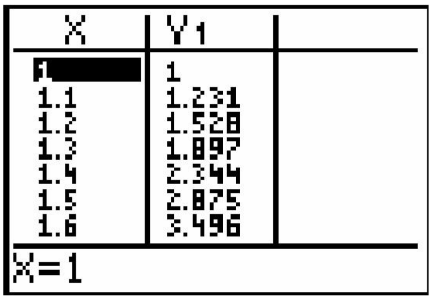
Taper ensuite sur [f(x)] et entrer la fonction :

[x,t,θ,n] [(] [x,t,θ,n] [+] [1] [)] [(] [x,t,θ,n] [−] [2] [)] [entrer]

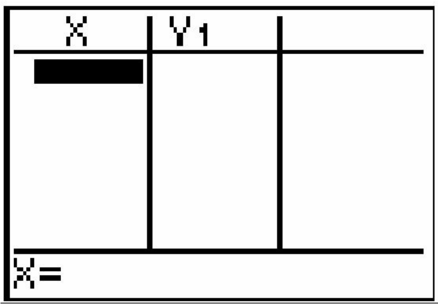


Il s'agit ensuite d'effectuer quelques réglages en allant sur [2nde] [déf table] :

Les deux premières lignes sont faciles à utiliser. Pour les deux dernières, on les réglera selon nos besoins.
Si on laisse en mode `Auto`, on a notre tableau avec un pas régulier :



Le mode `Dem` est le mode manuel. En le mettant en surbrillance pour `Valeurs`, on obtient cet écran :



Il suffit alors de taper dans la première colonne les valeurs des nombres dont on veut connaître l'image.

3 4 Représentation graphique

3 4 1 Lecture d'une courbe

Exemple

Ivan Ivanov, un dissident Bordure, décide de passer clandestinement la frontière borduro-syldave en empruntant un tunnel construit par la résistance. Malheureusement, le réseau a été infiltré par la police Bordure qui a placé une balise GPS sur Ivan ce qui permet de suivre son cheminement. Voici le tracé obtenu par les Bordures qui donne à chaque instant l'altitude en mètres d' Ivan en fonction du temps t exprimé en minutes sachant que $t = 0$ correspond au passage de la frontière :
En utilisant ce graphique, répondez aux questions suivantes avec la précision permise par le tracé.

1. Combien de temps Ivan a-t-il passé sous terre ?

....

2. Combien de temps a-t-il mis pour atteindre la frontière ?

....

3. Combien de fois s'est-il trouvé à 11 mètres d'altitude ?

....

4. À quel instant se trouvait-il à 12 mètres d'altitudes ?

....

5. À quelle hauteur se trouvait-il 6 minutes après avoir passé la frontière ?

....

6. Résumez le parcours d'Ivan dans un tableau où vous figurerez par une flèche vers le haut les périodes où Ivan a grimpé et par une flèche vers le bas les périodes où Ivan a descendu.

7. Résumez le parcours d'Ivan dans un tableau où vous figurerez par un + les périodes où Ivan a été au-dessus du niveau de la mer et par un − les périodes où Ivan a été en-dessous du niveau de la mer.

Voilà à quoi se résume ce qui vous est demandé de savoir faire en classe de 2^{nde} sur la lecture graphique...

3 4 2 Représentation graphique d'une fonction : un exemple

Exemple

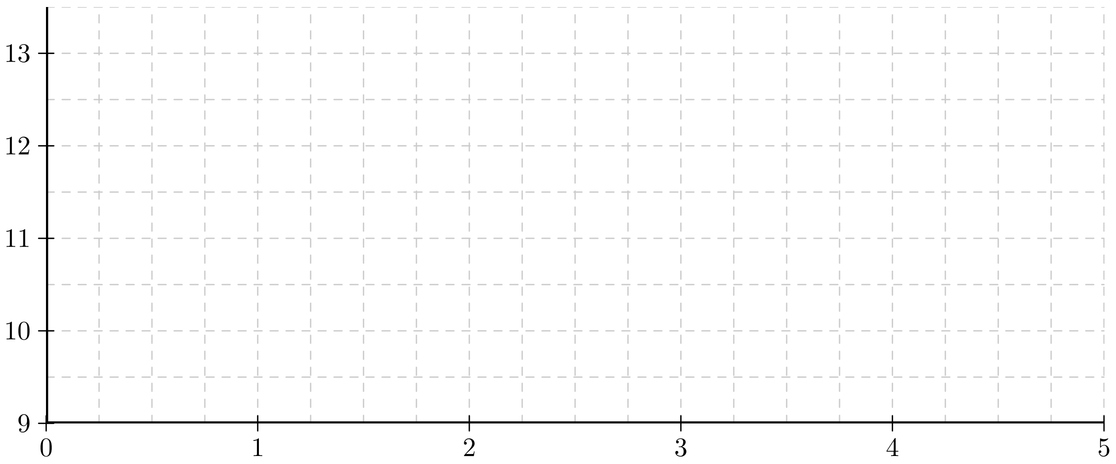
Des savants syldaves ont mis au point une formule donnant la hauteur h du gazon du jardin du Guide Suprême en centimètres en fonction du temps t en année écoulé depuis la Grande Révolution :

$$h(t) = \frac{t^3}{3} - 2t^2 + 3t + 10$$

1. Complétez le tableau suivant :

t	0	0,25	0,5	0,75	1	1,25	1,5	1,75	2	2,25	2,5	2,75	3	3,25	3,5	3,75	4	4,25
h(t)																		

2. Placez dans le repère suivant les points de coordonnées $(t, h(t))$, en remplaçant t par les valeurs du tableau. Vous marquerez les points par une croix :

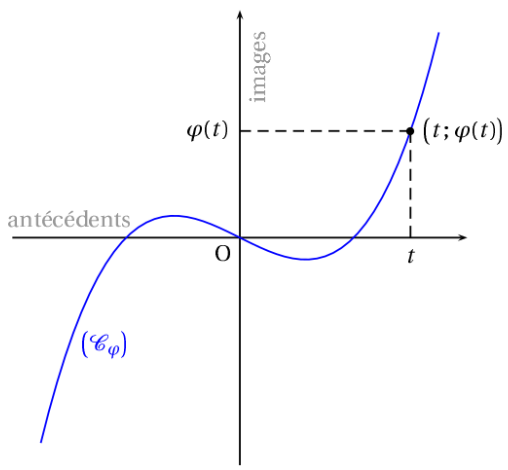


3. Que se passe-t-il à votre avis « entre les croix » ?

3 4 3 Représentation graphique d'une fonction : le cours

Définition 4 - 3

représentation graphique d'une fonction
Soit φ une fonction définie sur un ensemble $\mathcal{D}_\varphi$ et un repère (O,I,J).
On appelle **représentation graphique de la fonction** φ l'ensemble des points de coordonnées $\big(t\,;\,\varphi(t)\big)$, avec $t \in \mathcal{D}_\varphi$.
On note souvent cet ensemble $\left(\mathcal{C}_\varphi\right)$



Danger

Une courbe peut être... une droite. En effet, vous avez vu l'année dernière que la courbe représentative d'une fonction affine était une droite. Nous en reparlerons plus tard.

4 Résolution d'équations et d'inéquations

4 1 Résolution graphique d'équations

Nous ne savons résoudre que très peu d'équations algébriquement (par le calcul). Par exemple, nous ne savons pas résoudre sur $[0\,;\,4]$ l'équation :

$$\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + 10 = 11$$

Mais nous savons tracer à peu près la représentation graphique de la fonction

$$\varphi : \begin{array}{rcl} [0\,;4] & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \frac{t^3}{3} - 2t^2 + 3t + 10 \end{array}$$

Nous savons aussi tracer la représentation graphique de la fonction :

$$\psi : \begin{array}{rcl} [0\,;4] & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & 11 \end{array}$$

Regroupons les deux représentations sur un même graphique (il en manque une...) :
Un point situé à l'intersection de ces deux courbes... appartient à ces deux courbes donc ses coordonnées sont de la forme :

— d'une part $(t, \frac{t^3}{3} - 2t^2 + 3t + 10)$ car il appartient à $(\mathcal{C}_\varphi)$;

— d'autre part $(t, 11)$ car il appartient à $(\mathcal{C}_\psi)$.

Alors $\frac{t^3}{3} - 2t^2 + 3t + 10 = 11$ donc l'abscisse t de ce point est une solution de l'équation $\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + 10 = 11$
On peut donc lire les solutions de l'équation sur le graphiques : ce sont les abscisses des points d'intersection des deux courbes.
Ici, on trouve trois solutions : $x_1 \approx$ ....., $x_2 \approx$ ..... et $x_3 \approx$ ......

4 2 Résolution graphique d'inéquations

C'est un peu le même problème que pour les équations. Reprenons l'exemple précédent. Nous ne savons toujours pas résoudre sur $[0\,; 4]$ l'inéquation :

$$\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + 10 \leqslant 11$$

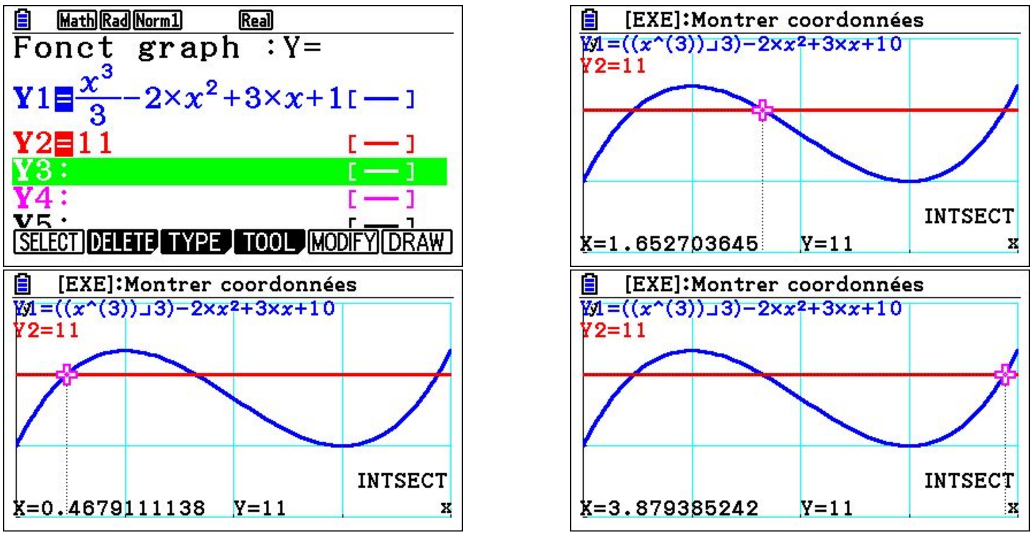
Mais nous savons tracer à peu près la représentation graphique de la fonction

$$\varphi : \begin{array}{rcl} [0\,;4] & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \frac{t^3}{3} - 2t^2 + 3t + 10 \end{array}$$

Nous savons aussi tracer la représentation graphique de la fonction :

$$\psi : \begin{array}{rcl} [0\,;4] & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & 11 \end{array}$$

Regroupons les deux représentations sur un même graphique (il en manque toujours une...) et plaçons les trois solutions trouvées précédemment :



Un point de $\mathcal{C}_\varphi$ dont l'abscisse t est située dans l'intervalle $[0\,; x_1]$ est au-dessous du point de $\mathcal{C}_\psi$ ayant la même abscisse.

L'ordonnée $\varphi(t)$ du premier est donc inférieure à l'ordonnée $\psi(t)$ du second.
Ainsi, quelque soit $t \in [0; x_1]$, on a $\varphi(t) \leqslant \psi(t)$, c'est-à-dire $\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + 10 \leqslant 11$. L'intervalle $[0\,; x_1]$ est donc inclus dans l'ensemble des solutions de l'inéquation.
Trouvez l'autre intervalle qui est inclus dans l'ensemble des solutions de l'inéquation.

Résolvez alors l'inéquation sur $[0\,; 4]$:

Danger

Ces méthodes de résolutions d'équations et d'inéquations présentent deux gros inconvénients :

- on n'obtient que des APPROXIMATIONS des solutions. Pour vérifier s'il s'agit réellement d'une solution exacte, il faut effectuer un calcul;
- on ne peut lire que les approximations des solutions qui apparaissent dans la « fenêtre » affichée. On ne peut donc pas savoir s'il en existe d'autres ailleurs.

Cependant, ces méthodes présentent l'avantage de pouvoir localiser à peu près des solutions d'équations et d'inéquations que nous ne savons pas (encore) résoudre algébriquement.

4 3 Résolution algébrique d'équations

Nous sommes en Seconde donc nous ne savons résoudre qu'un type d'equation :

$$ax + b = 0$$

N'oubliez pas que résoudre une équation, c'est trouver les éventuelles valeurs de l'inconnue qui vérifient l'égalité.
On appelle ce genre d´équation une *équation du premier degré* car la plus haute puissance à laquelle est élevée l'inconnue est 1.
Si vous n'êtes pas confronté à une équation du premier degré, il faut tenter de s'y ramener.
Par exemple, soit f la fonction $x \mapsto x^2$. On cherche les antécédents éventuels de 5 par f.
On doit donc résoudre l'équation $f(x) = 5$, c.a.d.

$$x^2 = 5$$

Ouh la la, mais c'est une équation du second degré, on ne sait pas faire, c'est un méchant prof qui nous pose des problèmes de 1ère...quoique...
Essayons de nous ramener à un cas connu. J'ai déjà été confronté à des expressions du second degré dans ma jeunesse...Bon sang ! Mais c'est bien sûr ! Les identités remarquables ! Ah, c'était le bon temps, on répétait bêtement des formules pendant des heures, sans chercher à réfléchir...

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)(a + b)$$

...Mais !...Cela nous permet de passer du second au premier degré ! Oui mais, quel rapport avec mon problème ?

$$x^2 = 5 \text{ si, et seulement si, } x^2 - 5 = 0$$

et 5, ce n'est pas un carré :-(ah mais si :-) $5 = \sqrt{5}^2$ donc je me ramène à résoudre l'équation :

$$x^2 - \sqrt{5}^2 = 0$$

c.a.d.

$$(x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5}) = 0$$

Et là, une autre tarte à la crème du collège : on a deux nombres dont le produit est nul, cela signifie que l'un des deux au moins vaut zéro ! (vous n'êtes pas de ceux qui pensent ue c'est pareil pour tout autre nombre : si le produit de deux nombres vaut 4, c'sst que l'un au moins des deux vaut 4 ?...Meu non ! Vous n'êtes pas de ces gens qui ne réfléchissent pas !)

$$x - \sqrt{5} = 0 \text{ ou } x + \sqrt{5} = 0$$

Deux problèmes du second degré que l'on sait résoudre et on trouve bien :

$$x = \sqrt{5} \text{ ou } x = -\sqrt{5}$$

Bon, on aurait pu aussi réfléchir à la notion de *racine carrée*. Résoudre $x^2 = 5$ c'est chercher les nombres dont le carré vaut 5 et on sait qu'il en existe deux, $\sqrt{5}$ et $-\sqrt{5}$....

Recherche

Que se passe-t-il si on doit résoudre $(x+2)^2 = 5$?

Il y a aussi un autre cas qui peut être étudié au collège :

$$x^2 + 4x + 4 = 0$$

Recherche

Comment faire ?

Et puis il y a des petites surprises...Si on nous les propose en Seconde, c'est qu'on nous aidera pour retrouver un cas connu.
Pour régler les problèmes du style $7x^2 - 123x + 1678 = 0$, on attendra d'être en première...

EXERCICES

TP 4 - 1

Définissez une fonction Python qui prend en entrée les dimensions d'un rectangle et qui calcule son périmètre puis une autre qui calcule son aire.

TP 4 - 2

Documentez-vous sur le code ASCII.
Étudiez les fonctions Python `ord` et `chr` sachant qu'en gros `ord` renvoie le code ASCII d'un caractère donné en entrée et `chr` renvoie le caractère dont on a donné le code ASCII en entrée.
Par exemple :

```
In [213]: ord('a')
Out[213]: 97

In [214]: chr(97)
Out[214]: 'a'

In [215]: ord('A')
Out[215]: 65

In [216]: ord('B')
Out[216]: 66

In [217]: ord('b')
Out[217]: 98
```

Construisez une fonction Python qui prend en entrée une lettre majuscule et renvoie la même lettre en minuscule.
Par exemple, vous devez obtenir :

```
In [220]: to_minus('E')
Out[222]: 'e'
```

Recherche 4 - 1

On considère un « mécanisme » qui prend deux entiers `p` et `q` en entrée et renvoie leur produit : est-ce une fonction ?
On considère un « mécanisme » qui prend un entier en entrée un entier `m` et qui renvoie un couple d'entiers dont `m` est le produit : est-ce une fonction ?

Recherche 4 - 2

Un appareil a relevé de manière continue la température dans un abri entre 0 heure à 24 heures. Les points notés sur la courbe indiquent des relevés exacts.

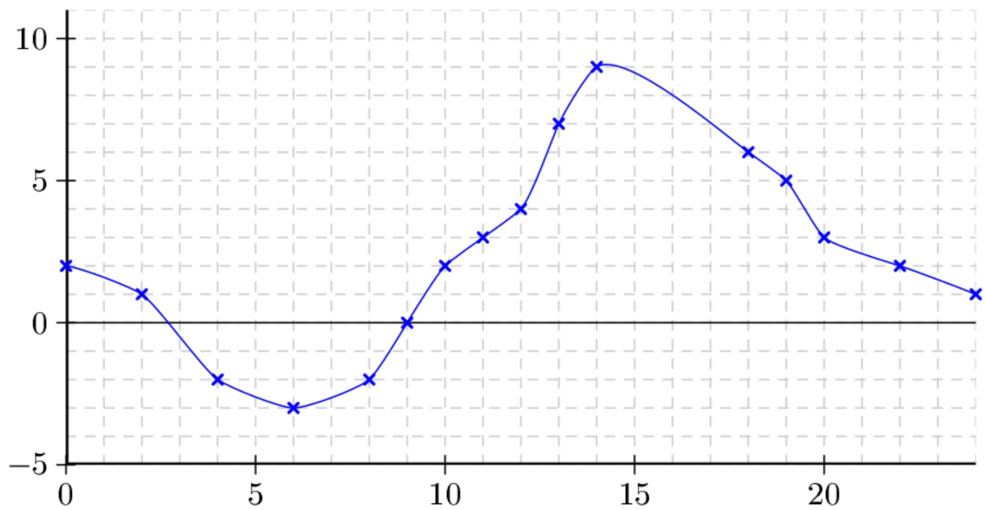


Figure 4.1

Sur ce graphique, on peut lire par exemple qu'à 12h00, la température était de 4°. Au nombre 12 est ainsi associé la valeur 4. On note $\mathbf{f(12) = 4}$ ou encore $\mathbf{f : 12 \mapsto 4}$. La **fonction** f représente l'association entre l'heure et la température. On dit que 12 a pour **image** 4 ou que 4 est **l'image de** 12 **par la fonction** f.

1. Compléter :

  i. La température à 4h00 est de donc $f(4) =$.
  L'image de 4 par f est .

  ii. $f(9) =$. L'image de 9 par la fonction f est .
  Il faisait ^{o} à heures.

  iii. L'image de 20 par la fonction f est donc la température était de à .

  iv. $f(\quad) = 7$ donc à heures la température était de $^{\circ}$.

  v. $f : 6 \mapsto$ donc l'image de .

2. Expliquer pourquoi il n'existe pas plusieurs points distincts de la courbe qui ont la même abscisse ?

3. Déterminer l'intervalle de temps pendant lequel la température a été relevée :
$\mathcal{D}_f =$

4. Plus généralement, on note x l'heure de l'enregistrement et $f(x)$ la température correspondante (avec x appartenant à $\mathcal{D}_f$). Compléter le tableau suivant :

x	0	3	6	9	12	15	18	21	24
$f(x)$									

Recherche 4 - 3

Traduire par une ou plusieurs égalités chacune des phrases suivantes :

1. L'image de 5 par la fonction f est égale à 4.

2. 5 est l'image de -3 par la fonction f.

3. 2 a pour image 0 par la fonction f.

4. Les images de 2 et 4 par la fonction f sont nulles.

5. Les nombres qui ont pour image 5 par la fonction f sont -3 et 0.

6. 1 est l'image des nombres -2 et 1 par la fonction f.

7. Au nombre 8, on associe le nombre 17 par la fonction f.

8. f est une fonction qui, au nombre -2 associe le nombre $\sqrt{3}$.

9. f est la fonction qui à tout nombre réel x associe son carré.

10. f associe à tout nombre réel x la somme de son carré et de son triple.

Recherche 4 - 4

Traduire chaque égalité par une phrase, en utilisant le mot image :

1. $f(-2) = 1$

2. $f(x) = -2$

3. $g(4) = 0$

4. $b = g(0)$

5. $y = f(x)$

6. $v = f(t)$

Recherche 4 - 5

Here is the table of values of a function f :

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	5	0	3	5	2	1	4

1. What is the image of -2 ?

2. What number has image 2 ?

3. What number has preimage -1 ?

4. Give two numbers that have the same image.

Recherche 4 - 6

La courbe ci-contre représente une fonction f.

1. Compléter les phrases suivantes :
   — L'image de 1 est .
   — L'image de est 4.
   — L'antécédent de -3 est .
   — L'antécédent de est 4.
2. Compléter les égalités :
   — $f(-3) =$.
   — $f(\quad) = -3$.
   — $f(0) =$.
   — $f(\quad) = -4$.

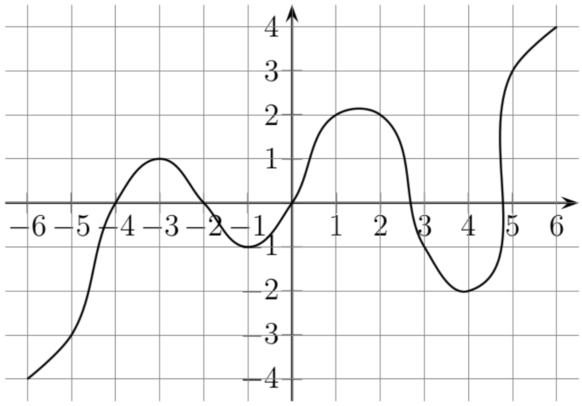


FIGURE 4.2

3. Dresser le tableau de valeurs de f pour x variant entre -6 et 6, de 1 en 1.
4. Compléter les phrases en utilisant soit “Pour tout ... on a ...” soit “il existe un ... tel que ...”.
   i. ... nombre réel x ... $f(x) = 3$.
   ii. ... nombre réel x ... $f(x) \leq 4$.
   iii. ... nombre réel x ... $f(x) = -3$.
   iv. ... nombre réel x de $[-4; -2]$, ... $f(x)$ est positif.
   v. ... nombre réel x de $[0; 5]$, ... $f(x)$ est négatif.

Recherche 4 - 7

Below is given the graph of a function f defined over $[-4, 3]$ by the formula $f(x) = 0.5(x+1)^2 - 2$

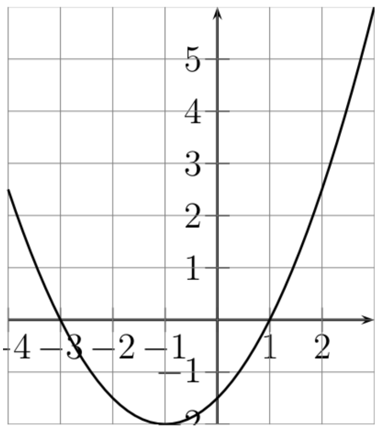


FIGURE 4.3

1. i. Read on the graph the images of 0, -1 and $\sqrt{2}$.
   ii. Check these results using the formula.
2. i. Read on the graph the preimages of 0, -3 and -2.
   ii. Check these results using the formula.
3. i. Are the following point on the graph of f ?

$$A(1, 0) \quad ; \quad B(2, 2) \quad ; \quad C(-3, 0).$$

   ii. Explain how you can check the previous answer using the formula, and do it.

Recherche 4 - 8

Cet exercice est un vrai ou faux. Justifier pour chacune des propositions suivantes si elle est vraie ou fausse puis rectifier les propositions fausses.

La courbe d'une fonction f a été représentée ci-dessous.

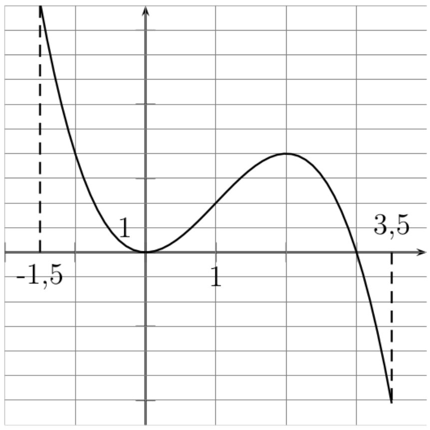


Figure 4.4

1. 3, 5 a pour image −6 par f.
2. 3 est l'image de 0 par f.
3. La courbe représentative de f a deux points d'ordonnée nulle.
4. $f(-1) = f(2)$.
5. $f(x)$ n'est jamais inférieur à 1, 5.
6. $f(2) < f(3)$.
7. si $0 \leq x \leq 3$ alors $0 \leq f(x) \leq 4$.

Recherche 4 - 9

On considère la fonction f définie par $f(x) = (x+1)^2 + 4$.

1. Déterminer par le calcul les images de 0, de −1 et de $\sqrt{2}$.
2. Déterminer les antécédents de 0, puis ceux de 4 et enfin ceux de 8.
3. Dresser un tableau de valeurs de pas 1 pour x variant de −4 à 3.
4. Tracer la représentation graphique de f.

Recherche 4 - 10

On considère l'algorithme ci-dessous :

1. Déterminer l'image de 0 par cet algorithme.
2. Déterminer l'image de −3 par cet algorithme. Quel modification faudrait-il apporter à l'algorithme pour éviter le problème ?
3. Soit f la fonction qui à la variable x associe le réel y obtenu après application de l'algorithme. Donner l'expression algébrique de f. Simplifier.

Fonction $f(x : \textit{réel}) : \textit{réel}$
Début
$a \leftarrow x+2$
$b \leftarrow \dfrac{1}{a+1}$
$y \leftarrow a^2 + \dfrac{1}{b}$
Retourner y
Fin

Recherche 4 - 11

Pour chacune des courbes ci-dessous, indiquer s'il peut s'agir de la représentation graphique d'une fonction.

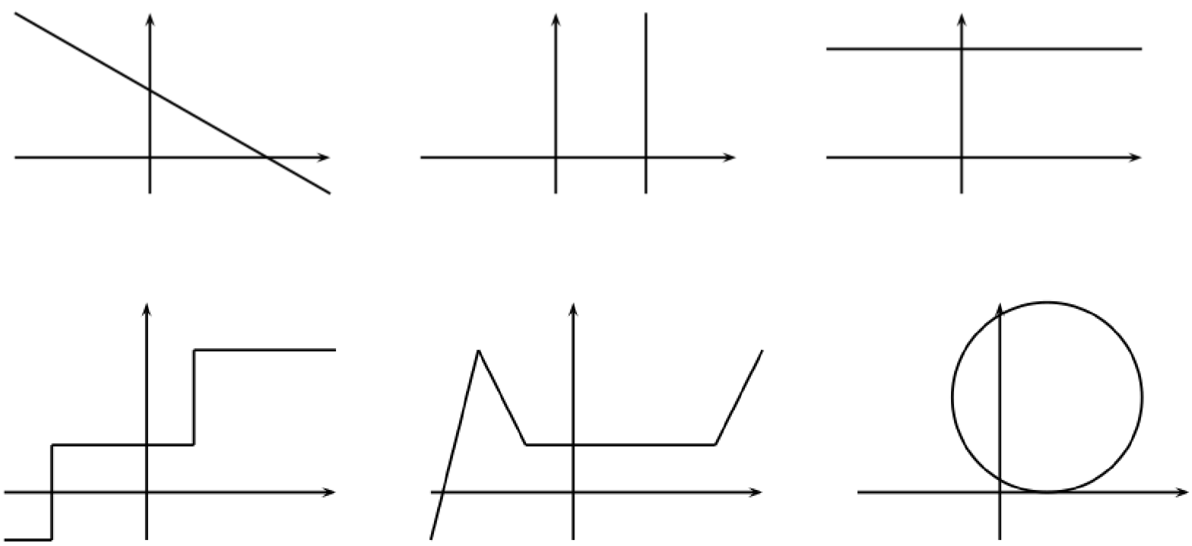


Figure 4.5

Recherche 4 - 12

Parmi les tableaux de valeurs ci-dessous, lequel ne peut pas être celui d'une fonction. Justifier.

1.

x	-5	-2	0	1	10	-3	-4
y	2	3	1	2	3	1	2

2.

x	-5	-2	0	-5	-2	0	-5
y	2	3	1	7	5	4	6

Recherche 4 - 13

L'algorithme ci-dessous est une simplification du procédé utilisé pour tracer des courbes en CAO.

```
Fonction f(x, a, b: réels):réels
Début
    Si x ∈ [0;1] Alors
        a ← x
        b ← 0
    SinonSi x ∈ [1;2] Alors
        a ← x
        b ← x − 1
    SinonSi x ∈ [2;3] Alors
        a ← 4 − x
        b ← x − 1
    SinonSi x ∈ [3;4] Alors
        a ← 4 − x
        b ← 5 − x
    SinonSi x ∈ [4;5] Alors
        a ← 0
        b ← 5 − x
    FinSi
    Retourner a, b
Fin
```

1. En utilisant l'algorithme, compléter le tableau de valeur suivant :

x	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5
a											
b											

2. Dans un repère, placer l'ensemble des points de coordonnées $(a;b)$ obtenus ci-dessus.

3. La courbe obtenue est-elle celle d'une fonction ? Expliquer

Recherche 4 - 14 Les Syldaves et leurs Schritzzñòtschhs à poil vert

Les Syldaves aiment les animaux et ceux-ci le leur rendent bien. Le Schritzzñòtschh à poil vert est d'ailleurs comme vous le savez l'animal préféré des Syldaves.
Si vous allez en Syldavie, une question que ne manqueront pas de vous poser les indigènes est : « entre votre Schritzzñòtschh à poil vert et vous, qui est le plus jeune ? ».
Pour ne pas vous laisser surprendre, mieux vaut jeter un coup d'œil sur le tableau suivant :

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
y	0	16	23	28	32	36	40	44	48	52	56	60	64	68	72	76	80	84	88	92	96

Table 4.1 – L'âge d'un Schritzzñòtschh à poil vert ramené à l'échelle humaine

x est l'âge du Schritzzñòtschh à poil vert (en années) et y est l'âge humain correspondant (en années).

1. Représenter dans un repère orthogonal $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ les points de coordonnées $(x;y)$ correspondant aux différentes valeurs du tableau ci-dessus (échelle : 1 cm pour une année sur l'axe des abscisses, 2 mm pour une année sur l'axe des ordonnées). Que remarque-t-on ?

2. **i.** On appelle D la droite à laquelle appartiennent la majorité des points du graphique.
Déterminer une équation de D.

ii. Adolf a 4 ans et demi ; à quel âge humain cela correspond-il ?

iii. Quel sera l'âge de Grossertaleruntersturmenfeldenfühlenratschweintöte lorsque son âge humain correspondant sera 89 ans ?

iv. Stalishnaïa a 9 mois ; peut-on estimer avec précision, en utilisant la droite D, l'âge humain correspondant ?

3. On propose de compléter la formule précédente pour $0 \leqslant x \leqslant 2$.

i. Tracer les trois segments de droites [OA], [AB] et [BC] avec $A(1;16)$, $B(2;23)$ et $C(2;28)$.
Si l'on respecte le graphique, quelle est la formule liant x et y pour :

- $0 \leqslant x \leqslant 1$
- $1 \leqslant x \leqslant 2$
- $2 \leqslant x \leqslant 3$

Dans ces conditions, quel est l'âge humain correspondant à l'âge du Schritzzñôtschh à poil vert Stalishnaïa ?

ii. On envisage de chercher une formule conduisant à une courbe au tracé « plus régulier » entre les trois premiers points O, A, B.
On propose : $y = ax^2 + bx + c$ où a, b et c sont des nombres réels.
Calculer a, b et c sachant que la courbe doit passer par les points O, A et B.
Compléter le tableau suivant à l'aide de la formule obtenue :

x	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1	1,2	1,4	1,6	1,8	2	2,2	2,4	2,6	2,8	3
y																

Représenter dans un repère orthogonal les points de coordonnées (x, y) correspondant aux différentes valeurs du tableau ci-dessus (échelle : 5 cm pour une année sur l'axe des abscisses, 2 mm pour une année sur l'axe des ordonnées). Tracer la courbe qui en résulte.
Placer les points A, B et C. Cette courbe passe-t-elle par le point C.

4. Un grand savant syldave propose de décrire la correspondance entre l'âge d'un Schritzzñòtschh à poil vert et celui d'un être humain par une formule unique pour : $0 \leqslant x \leqslant 10$:

$$y = 4(x+4) - 4^{(2-x)}$$

i. Calculer y pour chacun des entiers 0, 1, 2. Cette formule vous paraît-elle satisfaisante ?

ii. En utilisant une calculatrice, calculer y pour

- x variant de 0 à 1 au pas de 0,1 ;
- x variant de 1 à 2 au pas de 0,2 ;
- x variant de 2 à 10 au pas de 0,5.

Représenter sur le même graphique qu'au **3.2.** les points de coordonnées $(x; y)$ pour $0 \leqslant x \leqslant 10$

Recherche 4 - 15 Évolution de la population des Schritzzñôtschhs à poil vert

L'évolution de la population des Schritzzñôtschhs à poil vert d'une année à l'année suivante a, dans certains cas, été modélisée par des écologistes syldaves de la façon suivante :

— soit x la population, en milliers d'individus, d'une année donnée ;

— la population x' l'année suivante, toujours en milliers d'individus, est :

$$x' = f(x) = \lambda x(1-x)$$

On se propose d'étudier une telle évolution dans le cas particulier où : $x' = f(x) = 1,6x(1-x)$ et $x \in [0,1]$.
Sur le graphique 4.6 page 76, on a représenté $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f ainsi que la droite D d'équation $y = x$.

Exemples d'évolution de la population d'une année à l'année suivante

1. La population, une année donnée, est égale à 0,7. Soit p la population de l'année suivante.

i. Vrai ou faux ?

i. p est un antécédent de 0,7 par f — Vrai – Faux
ii. p est la solution de l'équation $f(x) = x$ — Vrai – Faux
iii. $p = f(0,7)$ — Vrai – Faux
iv. p est une solution de l'équation $f(x) = 0,7$ — Vrai – Faux
v. p est l'image de 0,7 par f — Vrai – Faux

ii. Déterminer p à l'aide du graphique, puis à l'aide d'une calculatrice.

2. La population, une année donnée, est égale à q (non nul) et s'éteint l'année suivante.

i. Vrai ou faux ?

i. q est un antécédent de 0 par f Vrai – Faux

ii. q est la solution de l'équation $f(x) = x$ Vrai – Faux

iii. $q = f(0)$ Vrai – Faux

iv. q est une solution de l'équation $f(x) = 0$ Vrai – Faux

v. q est l'image de 0 par f Vrai – Faux

ii. Déterminer q à l'aide du graphique, puis à l'aide d'une calculatrice.

iii. Pourquoi la population s'est-elle éteinte ?

3. La population, une année donnée, est égale à r (non nul) et reste la même l'année suivante.

i. Vrai ou faux ?

i. r est un antécédent de 0 par f Vrai – Faux

ii. r est la solution de l'équation $f(x) = x$ Vrai – Faux

iii. $r = f(0)$ Vrai – Faux

iv. r est une solution de l'équation $f(x) = 0$ Vrai – Faux

v. r est l'image de 0 par f Vrai – Faux

ii. Déterminer r à l'aide du graphique, puis à l'aide d'une calculatrice.

Etude de l'évolution d'une population sur plusieurs années

En 1990, la population de Schritzzñôtschhs à poil vert compte 0,9 milliers d'individus.
On pose $a = 0,9$, $b = f(a)$, $c = f(b)$, $d = f(c)$, $e = f(d)$, $g = f(e)$, $h = f(g)$ et $i = f(h)$,

1. Que représentent les nombres a, b, c, d, e, g, h et i par rapport à la population de Schritzzñôtschhs à poil vert ?

2. Etude graphique

i. En s'aidant de la courbe $\mathcal{C}$ représentative de f et de la droite D, placer successivement a sur l'axe des abscisses, puis b sur l'axe des ordonnées, puis b sur l'axe des abscisses, puis c sur l'axe des ordonnées, etc ...

ii. Déterminer graphiquement l'évolution à long terme de la population de Schritzzñôtschhs à poil vert.

3. Etude algébrique

i. Déterminer, à l'aide d'une calculatrice, une valeur approchée de chacun de ces 7 nombres à 0,01 près.

ii. Grâce à ces valeurs numériques, vérifier et éventuellement corriger les constructions graphiques.

iii. Comment évolue à long terme la population de Schritzzñôtschhs à poil vert ?

4. Comparaison des méthodes

Quels avantages peut-on trouver à chacune des méthodes algébrique et graphique pour l'étude de l'évolution de cette population :

i. du point de vue de la précision des résultats ?

ii. du point de vue de la compréhension des phénomènes ?

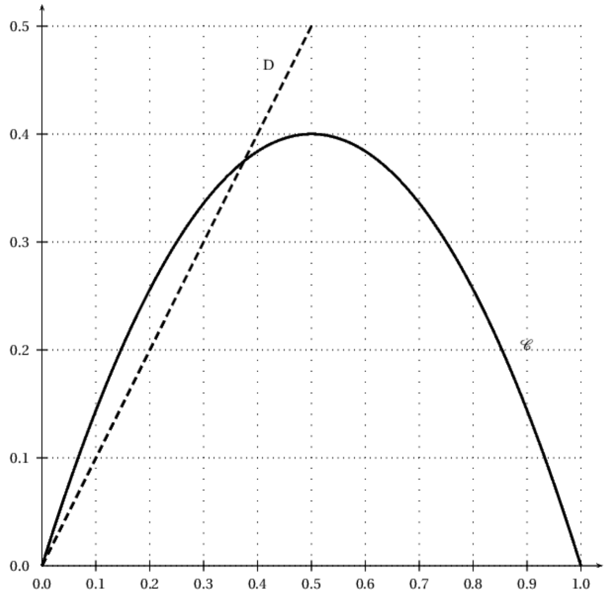


FIGURE 4.6 – Évolution de la population de Schritzzñòtschhs à poil vert

Recherche 4 - 16 **Science Syldave**

Chimie

Au temps $t = 0$ on met du Atchtzztscct et du Brtzzscfghj (notés)A et B) dans un bécher. Ils réagissent ensemble de sorte que l'on a constamment $C_A(t) + C_B(t) = 1$, où $C_A(t)$ et $C_B(t)$ sont les concentrations respectives des produits A et B au temps t. Sur le graphique 4.7 on a représenté la concentration du produit A en fonction du temps (en heures).

1. Représenter sur le même graphique la concentration $C_B(t)$ du produit B.

2. Résoudre les équations et inéquations suivantes :

  i. $C_A(t) = C_B(t)$

  ii. $C_A(t) \geqslant C_B(t)$

  iii. $C_B(t) \geqslant 0,6$

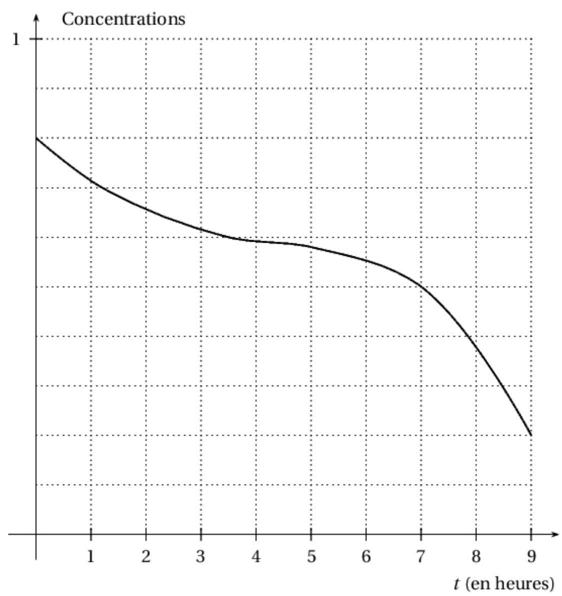


FIGURE 4.7 – Concentration de Atchtzztscct en fonction du temps

Électricité

En électricité, si on mesure l'intensité qui traverse une résistance ainsi que la tension à ses bor nes, on trouve la relation suivante :

$$\boxed{U = RI}$$

où :

— U est tension (en Volts)

— R est la résistance (en Ohms)

— I est l'intensité (en Ampères)

On effectue une expérience au cours de laquelle on fixe la tension $U = 400V$ aux bornes d'un dipôle et on augmente petit à petit la valeur de la résistance de ce dipôle. La mesure $R(t)$ de cette résistance au cours du temps est donnée par le graphique 4.8.

1. Représenter dans le même graphique l'intensité $I(t)$ en fonction du temps.

2. Résoudre les équations et inéquations suivantes :

i. $I(t) = 20$

ii. $I(t) \leqslant 10$

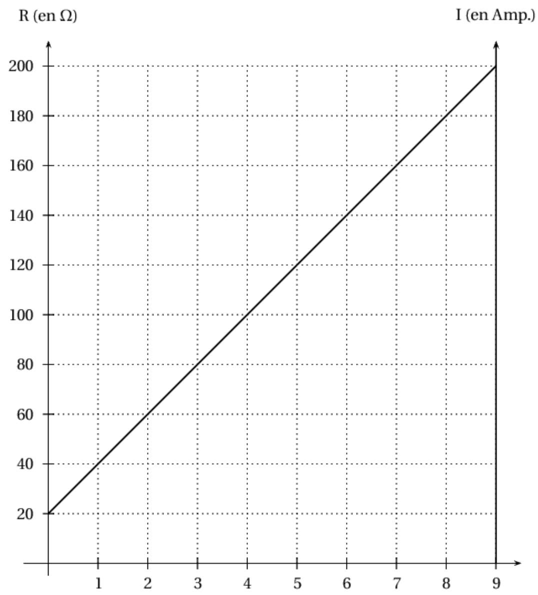


FIGURE 4.8 – Résistance en fonction du temps

Recherche 4 - 17 Résolution graphique

1. On a représenté dans un même repère orthonormal sur l'intervalle $[-4; 3]$

— la fonction f définie sur $\mathfrak{R}$ par $f(x) = (x+2)^2$,

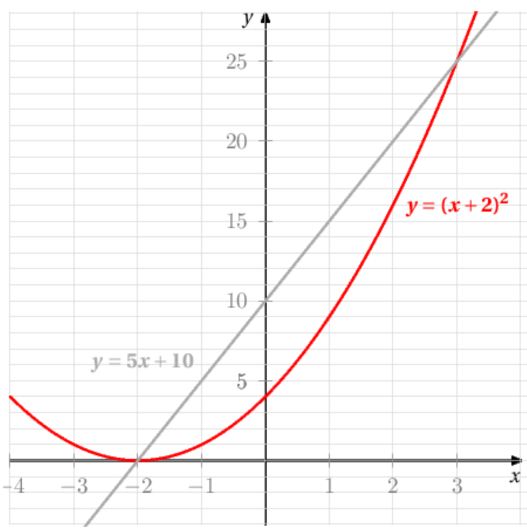
— la fonction g définie sur $\mathfrak{R}$ par $g(x) = 5x + 10$.

2. Utiliser ces représentations graphiques pour résoudre graphiquement :

i. l'équation $(x+2)^2 = 5x + 10$;

ii. l'inéquation $(x+2)^2 \leqslant 5x + 10$.

3. Retrouver les résultats précédents par le calcul.



Recherche 4 - 18

Une balle est lancée d'une hauteur de 2 mètres (c'est à dire du bout du bras d'une joueuse), avec un angle d'environ 11° par rapport au sol. Elle suit alors une trajectoire donnée approximativement par la formule

$$h(x) = -0,04x^2 + 0,2x + 2.$$

1. **i.** Dresser un tableau de valeurs pour h avec toutes les valeurs de x entières entre 0 et 10. Quelle semble être la valeur maximale de $h(x)$.

ii. Représenter graphiquement la fonction h sur l'intervalle $[0;10]$.

iii. Décrire les variations de h par un tableau de variations sur l'intervalle $[0;10]$.

iv. Utiliser les éléments précédents pour répondre aux questions suivantes :

i. A quelle distance du point de lancer la balle touche-t-elle le sol ?

ii. A quelle distance la balle atteint-elle son altitude maximale ?

iii. Pour quelles distances la balle est-elle au-dessus de son altitude initiale ? Pour quelles distances est-elle en-dessous ?

iv. Pour quelles distances la balle est-elle à une altitude comprise entre 1 et 2 mètres ?

2. Après le premier rebond, la balle suit une trajectoire donnée approximativement par la formule

$$h(x) = -0,1x^2 + 2,5x - 15.$$

i. A quelle distance du point de lancer la balle touche-t-elle le sol pour la 2ème fois ?

ii. A quelle distance la balle atteint-elle son altitude maximale entre les deux rebonds ? Comparer cette altitude maximale avec la valeur maximale avant le premier rebond.

Recherche 4 - 19

Let f and g be two functions such that $f(x) = x^2 + 2x$ and $g(x) = -x^2 - 2x + 6$.

1. Draw the graphs of functions f and g in the same coordinate system.

2. Solve graphically the equations and inequations below :

i. $f(x) = 0$;

ii. $g(x) = 0$;

iii. $f(x) = -1$;

iv. $f(x) = g(x)$;

v. $f(x) < 3$;

vi. $f(x) \leq g(x)$.

3. Find graphically two numbers x such that $g(x) - f(x) = 6$.

4. Solve algebraically the equations $f(x) = 0$ and $f(x) = -1$.

5. **i.** Prove that the equation $f(x) = g(x)$ is equivalent to $x^2 + 2x - 3 = 0$.

ii. Check algebraically that the solutions you found graphically for the equation $f(x) = g(x)$ are such that $x^2 + 2x - 3 = 0$.

6. **i.** Prove that the equation $g(x) - f(x) = 6$ is equivalent to $x^2 + 2x = 0$.

ii. Deduce the solutions of the equation $g(x) - f(x) = 6$. Do you find the same values that you found graphically ?

Recherche 4 - 20

On appelle $(\mathcal{C}_f)$ la courbe représentative d'une fonction f définie sur $[-5 ; 8]$.
On sait que la courbe passe par les points $A(-5 ; 1)$, $B(-1 ; 3)$, $C(3 ; 4)$, $D(6 ; 3)$ et $E(8 ; -1)$.

1. Placer ces points dans un repère du plan.

2. Tracer une courbe pouvant représenter f sachant que :

— f est strictement croissante sur $[-5 ; 3]$;

— f est strictement décroissante sur $[3 ; 8]$.

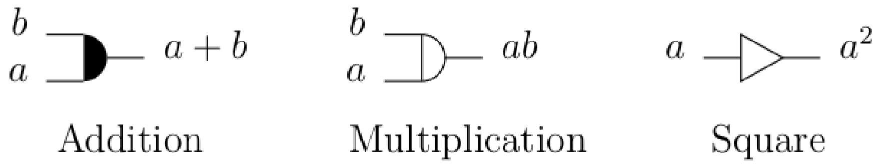
3. Quel est l'image de 3 ?

4. 3 a-t-il des antécédents ? Si oui, préciser lesquels.

5. Peut-on tracer une autre courbe respectant les conditions données ?

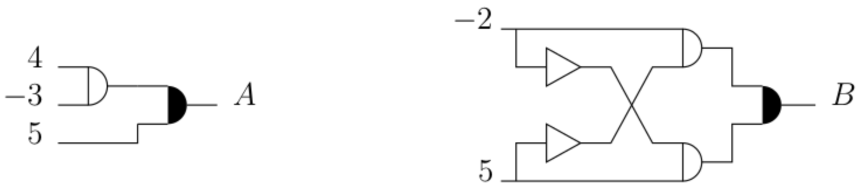
Recherche 4 - 21 Horner's machines

Any operation involving additions, multiplications and squares can be described by a *machine* made the three components shown below :



Study of some machines

1. Consider the two machines below.



i. Compute the outputs A and B.

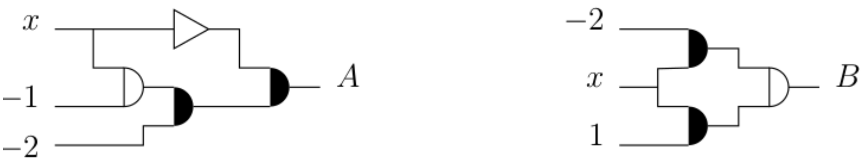
ii. What is the output of the second machine (the one of the right-hand side) when the input is $\frac{1}{2}$ and $\frac{1}{3}$?

iii. Express the output of the second machine as a formula with input a and b.

2. In the two situations below, compare the outputs A and B.

— *Situation 1 :*

— *Situation 2 :*

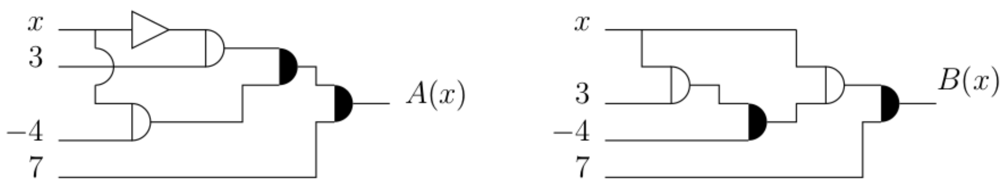


3. Draw a machine which outputs $(a+2b)^2$ when a and b are entered.

4. How can the addition component be used to carry out a subtraction ?

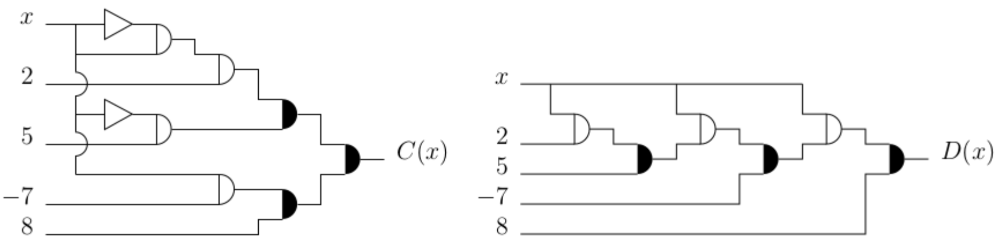
The most economical machine

1. **i.** Check that the outputs A(x) and B(x) of the two machines below are the same.



ii. Count the number of components and connexions in each of the two machines above. Which on is the most economical ?

2. **i.** Check that the outputs C(x) and D(x) of the two machines below are the same.



ii. Count the number of components and connexions in each of the two machines above. Which on is the most economical ?

3. Draw the most economical machine for the expression $7x^4 + 5x^3 + 3x^2 + 6x + 4$.