Exercice 1

On considère la suite (u_n) définie par $u_n = 5 - 2n$.

1) Calculer u_0, u_1 et u_2.

2) Démontrer que (u_n) est une suite arithmétique dont on précisera la raison.

3) Que vaut u_{100} ? Calculer la somme $S = u_0 + u_1 + \cdots + u_{100}$.

Exercice 2

On considère la suite (u_n) définie par $u_n = (n+1)^2 - n^2$.

1) Calculer u_0, u_1 et u_2.

2) La suite (u_n) est-elle arithmétique ? Si oui, préciser la raison.

3) Que vaut u_{99} ? Calculer la somme $S = 1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + 195 + 197 + 199$.

Exercice 3

On considère la suite (u_n) définie par $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{2}$ et $u_0 = 0$.

1) Calculer u_1, u_2 et u_3.

2) Justifier que la suite (u_n) est une suite arithmétique dont on précisera la raison.

3) Que vaut u_{100} ?

Exercice 4

La suite (u_n) est arithmétique de raison $r = 8$. On sait que $u_{100} = 650$.

Que vaut u_0 ?

Exercice 5

Calculer la somme $S = 1 + 2 + 3 + \cdots + 998 + 999$.

Exercice 6

La suite (u_n) est arithmétique de raison r. On sait que $u_{50} = 406$ et $u_{100} = 806$.

1) Calculer la raison r et u_0.

2) Calculer la some $S = u_{50} + u_{51} + \cdots + u_{100}$.

Exercice 7

Calculer les sommes suivantes :

$S_1 = 1 + 2 + 3 + \cdots + 2\,004 + 2\,005$ et $S_2 = 2\,006 + 2\,007 + 2\,008 + \cdots + 9\,998 + 9\,999$.

Exercice 8

Soit (u_n) la suite définie pour tout n par
$$u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}.$$

1) A l'aide de votre calculatrice,calculer u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_{100}, $u_{1\,000}$ et $u_{100\,000}$.
Quelle conjecture peut-on faire sur le sens de variation de la suite ? Pour une éventuelle limite ?

2) Démontrer que pour tout n non nul, $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$.

3) En déduire le sens de variation de la suite (u_n).

4) En utilisant le résultat de la question 2), montrer que, pour tout entier naturel n non nul,
$$u_n \leqslant \frac{1}{2\sqrt{n}}.$$
En déduire que la suite (u_n) est convergente et préciser sa limite.

Exercice 9

On considère une suite géométrique (u_n) de premier terme $u_1 = 1$ et de raison $q = -2$.

1) Calculer u_2, u_3 et u_4.

2) Calculer u_{20}.

3) Calculer la somme $S = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_{20}$.

Exercice 10

Un étudiant loue une chambre pour 3 ans. On lui propose deux type de bail :

- 1er contrat : un loyer de 200 € pour le premier mois puis une augmentation de 5 € par mois jusqu'à la fin du bail.
- 2ème contrat : un loyer de 200 € pour le premier mois puis une augmentation de 2 % par mois jusqu'à la fin du bail.

1) Calculer, pour chacun des deux contrats, le loyer du deuxième mois puis celui du troisième mois.

2) Calculer, pour chacun des deux contrats, le loyer du dernier mois, c'est-à-dire du 36ème mois.

3) Quel est le contrat globalement le plus avantageux pour un bail de 3 ans ? Justifier à l'aide de calculs.

Vocabulaire : un bail est un contrat de location.

Exercice 11

Déterminer un nombre x tel que les trois nombres 25, x et 16 soient trois termes d'une suite géométrique de raison négative.

Exercice 12

Jean est en train de lire un livre. En additionnant les numéros de toutes les pages qu'il a déjà lues, il obtient 351. En additionnant les numéros de toutes les pages qu'il lui reste à lire, il obtient 469.

1) A quelle page en est Jean ?

2) Combien de pages comporte ce livre ?

Remarque : on supposera que le livre commence à la page n°1.

Exercice 13

Calculer la valeur exacte de la somme :

$$S = 1 - 2 + 4 - 8 + 16 - 32 + \cdots + 4\,096.$$

Exercice 14

Calculer les sommes suivantes :

$S_1 = 1 + 3 + 9 + 27 + 81 + \cdots + 59\,049$ et $S_2 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + \cdots + 999.$

Dans les deux cas, on précisera s'il s'agit d'une somme de termes d'une suite arithmétique ou géométrique, ainsi que la raison.

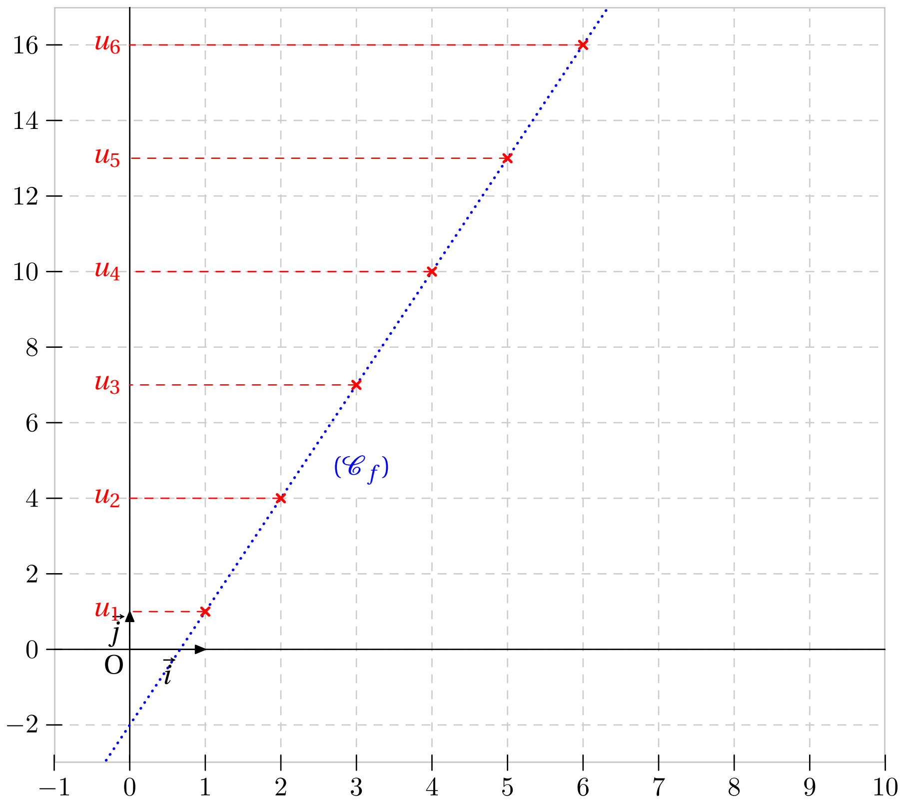
Exercice 15

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel non nul par la relation : $u_n = 3n - 2$.

1) Démontrer que la suite (u_n) est arithmétique de raison r que l'on précisera. Préciser son sens de variation.

2) Représenter graphiquement la suite (u_n). On se limitera aux cinq ou six premiers termes.

Illustration



Exercice 16

On considère les deux suites (u_n) et (v_n) définies, pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$u_n = \frac{3 \times 2^2 - 4n + 3}{2} \quad \text{et} \quad v_n = \frac{3 \times 2^n + 4n - 3}{2}.$$

1) Soit (w_n) la suite définie par $w_n = u_n + v_n$. Démontrer que (w_n) est une suite géométrique.

2) Soit la suite (t_n) définie par $t_n = u_n - v_n$. Démontrer que (t_n) est une suite arithmétique.

3) Exprimer la somme suivante en fonction de n :

$$S = u_0 + u_1 + \cdots + u_n.$$

Exercice 17

Pour l'achat d'un terrain et la construction d'une maison, un couple souscrit un emprunt. Les futurs propriétaires sont informés que le capital emprunté et les intérêts dus, lorsqu'ils seront remboursés, représenteront la somme de $80\,000$ €. La première mensualité est fixée à 300 € et le contrat stipule que les mensualités augmenteront de 20 € par année.

1) On note s_n le montant annuel remboursé au cours de la n-ième année suivant le début du prêt et on note n_0 la dernière année de remboursement. On admet que $n_0 > 10$.

- **a)** Calculer s_1, s_2, s_3 et s_4.
- **b)** Expliquer pourquoi la suite (s_n) se comporte comme une suite arithmétique pour $n < n_0$.
- **c)** Exprimer s_n en fonction de n (pour $n < n_0$).
- **d)** Calculer s_{10}.

2) On s'intéresse maintenant à la somme S_n cumulée des montants annuels remboursés au cours des n premières années :

$$S_n = s_1 + s_2 + \cdots + s_n.$$

- **a)** Calculer S_1, S_2, S_3 et S_4.
- **b)** Exprimer S_n en fonction de n (pour $n < n_0$).
- **c)** Au cours de quelle année le couple de propriétaires finira ses remboursements ?

Exercice 18

Calculer la valeur exacte des nombres suivants :

$A = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{38}}$

$B = 3 + 6 + 9 + 12 + \cdots + 99$

Exercice 19

Soit (u_n) la suite définie pour tout n par

$$u_0 = 0 \quad \text{et} \quad u_{n1} = \frac{5u_n - 3}{u_n + 1}.$$

1) **a)** Tracer la courbe de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{5x-3}{x+1}$ ainsi que la droite d'équation $y = x$. Utiliser cette courbe pour placer les réels u_1, u_2, u_3 et u_4.

b) Quelle conjecture peut-on faire sur les variations de la suite (u_n) et sur sa convergence.

2) Calculer u_1, u_2 et u_3. En déduire que (u_n) n'est ni arithmétique, ni géométrique.

3) On considère la suite (v_n) définie pour tout n par

$$v_n = \frac{u_n - 3}{u_n - 1}.$$

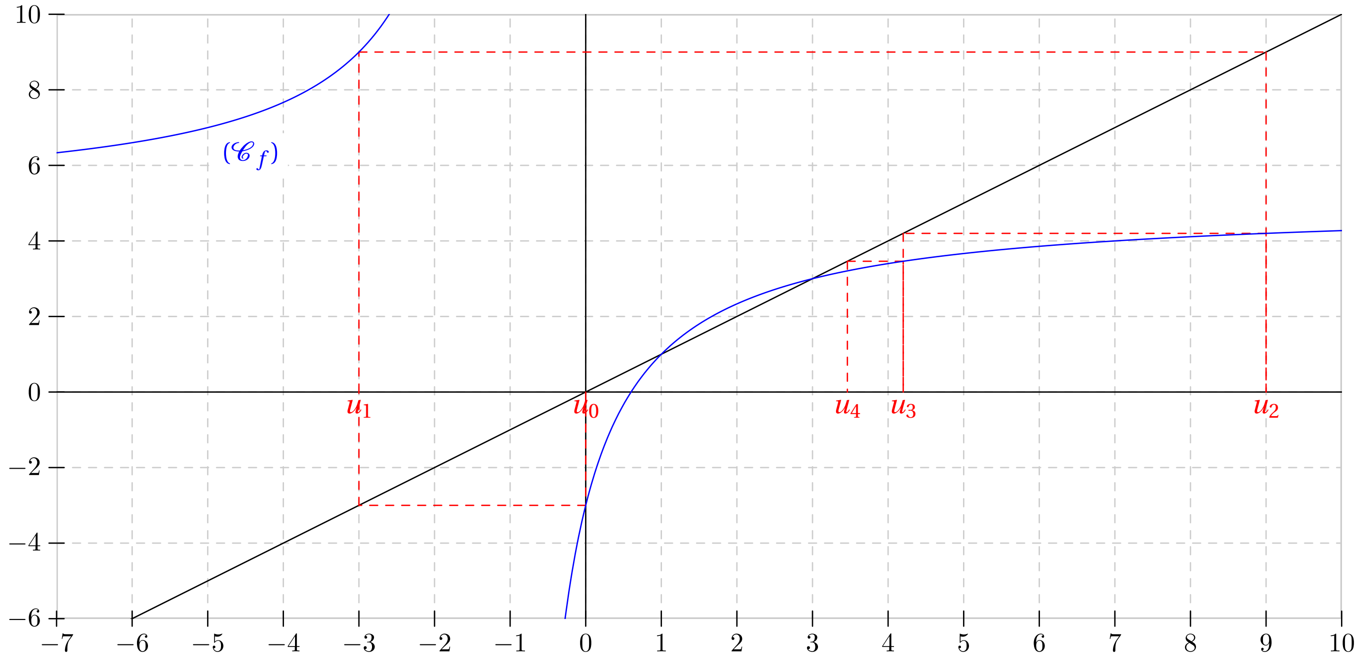
Montrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$ et exprimer v_n en fonction de n.

4) En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

5) Montrer que la suite (u_n) est bornée.

6) Montrer que la suite (u_n) est convergente et préciser sa limite.

Illustration



Exercice 20

On considère la suite (u_n) définie par récurrence par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{1+u_n} \end{cases}$$

1) Calculer u_1, u_2 et u_3.

2) Démontrer par récurrence que $0 \leqslant u_n \leqslant 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 21

Déterminer la limite de la suite (u_n) définie par :

$$u_n = \frac{3\sin n + 2\cos n + 5n}{n}.$$

Exercice 22

On considère la suite (u_n) définie par récurrence par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \text{ et } u_1 = 2 \\ u_{n+2} = 6u_{n+1} - 5u_n \end{cases}$$

1) Calculer u_2, u_3 et u_4.

2) Résoudre l'équation du second degré suivante : $x^2 = 6x - 5$.

3) Déterminer deux réels A et B tels que : $u_n = A \times 5^n + B$.

4) En déduire u_{10}.

Exercice 23

On considère la suite géométrique définie de la façon suivante :

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = 2u_n \text{ pour tout } n \geqslant 0. \end{cases}$$

1) Calculer u_2, u_3 et u_4.

2) Exprimer u_n en fonction de n, pour tout $n \geqslant 1$. Calculer une valeur approchée de u_{64}.

3) La légende du jeu d'échec.
Le roi demanda à l'inventeur du jeu d'échec de choisir lui-même sa récompense. Celui-ci répondit : « Place un grain de blé sur la première case de l'échiquier, deux grains sur la deuxième, quatre sur la troisième et ainsi de suite jusqu'à la 64*ème case ». le roi sourit de la modestie de cette demande.*

Calculer une valeur approchée du nombre de grains de blé que le roi devra placer sur l'échiquier.

Exercice 24

« Le premier jour du mois, je gagnai 2 centimes ; le deuxième jour du mois, je gagnai 4 centimes ; le troisième jour du mois, je gagnai 8 centimes ; etc ... : en doublant d'un jour à l'autre.
A la fin du mois, j'avais gagné environ un milliard de centimes ! C'était vers la fin des années soixante ... »

En quelle année était-ce ?

Exercice 25

En musique, le « LA » du diapason est un son dont la fréquence est $400\ Hz$. On appelle octave l'intervalle entre deux notes dont le rapport de fréquence est 2. Par exemple, la note dont la fréquence est $880\ Hz$ est aussi un « LA » car sa fréquence est le double de celle du « LA » diapason.
L'octave est divisée en douze parties appelées des « demi-tons ». Les notes obtenues en superposant des demi-tons sont appelées les notes de la gamme chromatique :

LA - SIb - SI - DO - DO# - RE -MIb - MI - FA - FA# - SOL - SOL# - LA

On admettra que les fréquences successives des notes de la gamme chromatique sont les termes d'une suite géométrique dont on veut déterminer la raison ; c'est-à-dire que connaisant la fréquence du « LA » du diapason ($440\ Hz$), on obtient un SIb en la multipliant par un nombre q, puis celle du SI en multipliant la fréquence du SIb par le même nombre q, etc ...

1) Exprimer la fréquence de chaque note de la gamme chromatique (de SIb à SOl#) en fonction de q.

2) Exprimer la fréquence du « LA » de l'octave supérieure au « LA » du diapason en fonction de q.

3) Sachant que la fréquence du « LA » de l'octave supérieure au « LA » du diapason est $880\ Hz$, calculer q.

Exercice 26

Les rayons cosmiques produisent continuellement dans l'atmosphère du carbone 14 qui est un élément radioactif. Durant leur vie, les tissus animaux et végétaux contiennent la même proportion de carbone 14 que l'atmosphère. Cette proportion décroît après la mort du tissu de $1,14\ \%$ en 100 ans.

1) Déterminer les pourcentages de la proportion initiale de carbone 14 contenu dans le tissu au bout de $1\,000$ ans, $2\,000$ ans et $10\,000$ ans.

2) Exprimer le pourcentage de la proportion initiale de carbone 14 contenu dans le tissu au bout de $k \times 10^3$ annéees.

3) Un fossile ne contient plus que $10\ \%$ de ce qu'il devait contenir en carbone 14. Donner une estimation de son âge.

Exercice 27

Les V.H.F. (voleurs fortement hiérarchisés) avaient tous, dans leur bande, un grade différent. Comme ils avaient une nuit volé un lot d'appareils photographiques, leur chef déclara :
« Le moins gradé en prendra un. Celui du grade immédiatement supérieur, deux. Celui du troisième grade, trois. Et ainsi de suite. »

Mais les voleurs se révoltèrent contre cette injustice : « Nous en prendrons cinq chacun, dit le plus audacieux. » Et ainsi fut fait.

Combien d'appareils les V.H.F. avaient-ils volés ?

Exercice 28

On considère la suite (u_n) définie par $u_n = 2^n - n$.

Calculer u_0, u_1 et u_2. La suite est-elle arithmétique ? Géométrique ?

Exercice 29

Une entreprise décide de verser à ses ingénieurs une prime annuelle de 500 €.
Pour ne pas se dévaluer, il est prévu que chaque année la prime augmente de $2\ \%$ par rapport à l'année précédente.
On note (u_n) la suite des primes avec $u_1 = 500$.

1) Calculer u_2 puis u_3, c'est-à dire la prime versée par l'entreprise la deuxième et la troisième année.

2) Préciser la nature de la suite (u_n) ainsi que sa raison q.

Un ingénieur compte rester 20 ans dans cette entreprise à partir du moment où est versée cette prime.

3) Calculer la prime qu'il touchera la 20ème année, c'est-à-dire u_{20}.

4) Calculer la somme totale S des primes touchées sur les 20 années, c'est-à-dire $S = u_1 + u_2 + \cdots + u_{20}$.

Exercice 30

On dispose d'un capital de $C_0 = 1\,500$ €.
Le 1er janvier 2000, on place ce capital sur un compte à intérêts composés de $3\ \%$ par an.

1) Calculer le capital C_1 obtenu au bout d'un an.

2) Calculer le capital C_7 obtenu au bout de 7 ans.
De quel pourcentage a augmenté le capital pendant ces 7 années ?

3) Combien d'années faut-il laisser cet argent sur le compte afin d'avoir un capital d'au moins $2\,000$ € ?

Exercice 31

On considère la somme $S = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \cdots + 1\,048\,576$.

1) Trouver, à l'aide de la calculatrice, l'entier n tel que $2^n = 1\,048\,576$.

2) Calculer la somme S.

Si vous n'avez pas su faire les questions 1) et 2), vous pouvez quand même faire la question 3).

Exercice 32

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \dfrac{2}{1+u_n} \text{ pour tout entier naturel } n \end{cases}$$

1) Calculer u_1 et u_2. La suite (u_n) est-elle arithmétique ? Géométrique ? Ni l'un ni l'autre ?

2) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a :

$$0 \leqslant u_n \leqslant 3.$$

3) On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naurel n par :

$$v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 2}.$$

a) Calculer v_0, v_1 et v_2. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique.

b) Exprimer v_n en fonction de n.

c) Exprimer u_n en fonction de v_n. Que vaut u_{10} ?

Exercice 33

Soit (u_n) la suite définie par : $u_n = n^4 - 6n^3 + 11n^2 - 5n$.

1) Calculer u_0, u_1, u_2 et u_3.

2) La suite (u_n) est-elle arithmétique ?

Exercice 34

1) ABC est un triangle rectangle. Son plus petit côté est 1 et les longueurs de ses côtés sont trois termes consécutifs d'une suite arithmétique. Déterminer ces longueurs.

2) ABC est un triangle rectangle. Son plus petit côté est 1 et les longueurs de ses côtés sont trois termes consécutifs d'une suite géométrique. Déterminer ces longueurs.

Exercice 35

Calculer les sommes suivantes :

$I_n = 1 + 3 + 5 + \cdots (2n - 1)$ somme des n premiers entiers naturels impairs.

$P_n = 2 + 4 + 6 + \cdots 2n$ somme des n premiers entiers naturels pairs.

Exercice 36

Calculer la somme suivante :

$$S = 1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + 5^2 - 6^2 + \cdots + 2\,005^2 - 2\,006^2.$$

Indication : regrouper les termes par deux.

Exercice 37

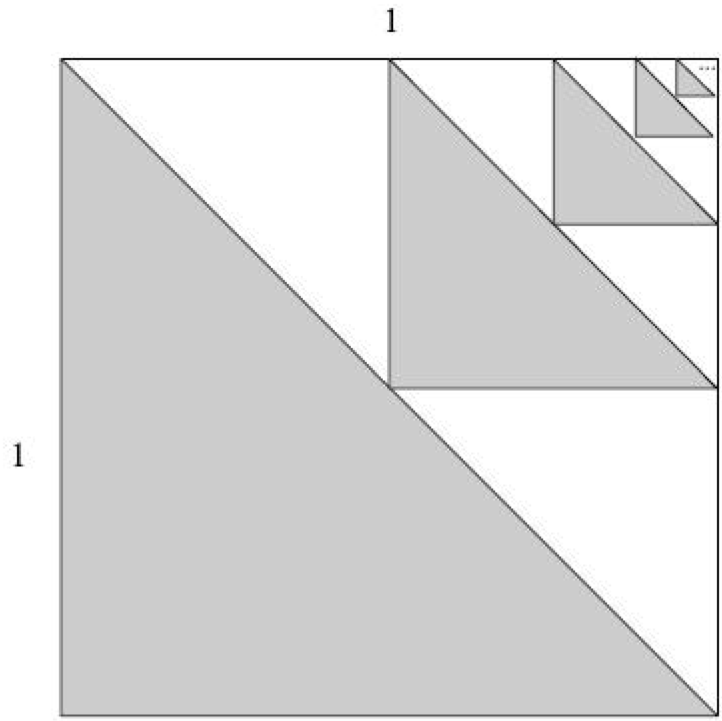
Résoudre l'équation :

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \cdots + \frac{1}{x^8} = 0.$$

Indication : calculer la somme puis remarquer que si x est solution alors $x < 0$.

Exercice 38

Calculer la somme des aires coloriées de la figure ci-dessous. Il y a une infinité de triangles ...



Exercice 39

Voici, à chaque fois, quatre termes d'une suite. Pour celles qui pourraient être arithmétiques ou géométriques, précisez la nature et la raison, et donner le terme suivant :

A : $1 \quad 1,2 \quad 1,6 \quad 2,4 \quad \cdots$

B : $1\,000 \quad 100 \quad 10 \quad 1 \quad \cdots$

C : $1 \quad 1,1 \quad 1,21 \quad 1,4641 \quad \cdots$

D : $0,2 \quad 0,4 \quad 0,8 \quad 0,16 \quad \cdots$

E : $24 \quad -12 \quad 6 \quad -3 \quad \cdots$

F : $\dfrac{\sqrt{2}}{2} \quad 1 \quad \sqrt{2} \quad 2 \quad \cdots$

G : $\dfrac{3}{8} \quad \dfrac{1}{4} \quad \dfrac{1}{6} \quad \dfrac{1}{9} \quad \cdots$

H : $\dfrac{1}{2} \quad \dfrac{1}{3} \quad \dfrac{1}{4} \quad \dfrac{1}{5} \quad \cdots$

Exercice 40

1) On peut considérer que la pression atmosphérique (p.a.) diminue de $1\ \%$ lorsqu'on monte de $1\,000\ m$.
P_0 étant la p.a. en un lieu donné et P_n la pression à n centaines de mètres au dessus, exprimer la relation entre P_{n+1} et P_n puis donner directement P_n en fonction de P_0 et n.

2) Un promeneur part du niveau de la mer, son baromètre indique $1\,000$ millibars. Il arrive à $400\ m$ d'altitude. Quelle est l'indication du baromètre ?

3) Arrivé au sommet de la montagne, il lit 894 millibars. A quelle altitude se trouve-t-il (à $100\ m$ près) ?

Exercice 41

Une cible est constituée de n cercles concentriques de rayon entiers de 1 à n. Les régions de la cible sont des couronnes, limitées par deux cercles consécutifs, (sauf la première qui est un disque) d'aire C_n.
Montrer que la suite (C_n) est arithmétique.

Exercice 42

Sachant que $u_0 = 1$, calculer à l'aide de la calculatrice une valeur approchée à 10^{-3} près des termes de rang 1, 2 et 3 des suites suivantes :

1) $u_{n+1} = 5u_n + 1$;

2) $u_{n+1} = 1 + (u_n)^2$;

3) $u_{n+1} = \cos(u_n)$;

4) $u_{n+1} = \dfrac{1}{u_n} + 1.$

Exercice 43

La suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est définie par $u_1 = 3$ et $u_{n+1} = \dfrac{3+u_n}{1-u_n}$.

Est-elle monotone ? A-t-elle une limite ?

Exercice 44

Lequel de ces deux nombres est le plus grand ?

$A = 2\,008(1+2+3+\cdots+2\,009)$ ou $B = 2\,009(1+2+3+\cdots+2\,008)$?

Exercice 45

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 3$ et, pour tout entier naturel n : $\quad u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 4$.
Soit (v_n) une suite définie pour tout entier naturel n par : $\quad v_n = 8 - u_n$.

1) Calculer u_1, u_2, u_3 puis v_1, v_2, v_3.

2) Montrer que (v_n) est une suite géométrique et préciser sa raison.

3) En déduire une expression de v_n en fonction de n, puis de u_n en fonction de n.

4) **a)** Question de cours : prouver qu'une suite géométrique de premier terme v_0 positif et de raison q comprise entre 0 et 1 est monotone.

b) Quelles sont les variations des suites (u_n) et (v_n) ?

5) Trouver un majorant et un minorant de la suite (u_n).

6) Quelles sont les limites des suites (u_n) et (v_n) ?

Exercice 46

Au mois de novembre 2005, l'imprimerie Farfarelli imprime $2\,100$ livres par mois. Le directeur décide d'augmenter les cadences de 250 livres par mois.
On note u_0 le nombre de milliers de livres imprimés au mois de novembre 2005 et u_n le nombre de milliers de livres imprimés n mois plus tard.

1) Donner la valeur de u_0.

2) Montrer que la suite (u_n) est arithmétique. On précisera sa raison.

3) Quel sera le nombre de livres imprimés en janvier 2007 ?

4) Combien de livres ont été imprimés par la société durant l'année 2006 ?

5) A partir de quand la production annuelle (de janvier à décembre) est-elle supérieure à $30\,000$ livres ?

Exercice 47

Calculer la limite de la suite de terme général : $u_n = \dfrac{3^n - 2^{n+1}}{3^{n+1} + 2^n}$.

Attention, le numérateur et le dénominateur ne sont pas des polynômes !

Exercice 48

Soit (u_n) une suite définie pour tout entier naturel n par :

$$u_n = \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + \frac{n}{n^2+3} + \cdots + \frac{n}{n^2+n}.$$

1) Calculer u_1, u_2, u_3 et u_4.

2) **a)** Combien de termes contient la somme u_n ?

b) Quel est le plus grand terme dans la somme u_n ? Quel est le plus petit ?

c) En déduire que $\dfrac{n}{n^2+n} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{n}{n^2+1}$.

3) Déterminer la limite de la suite (u_n).

Exercice 49

Depuis qu'il est à la retraite, un homme tond sa pelouse tous les samedis. Il recueille chaque fois 120 litres de gazon qu'il stocke dans un bac à compost de 300 litres.
Chaque semaine, les matières stockées perdent, par décomposition ou prélèvement, les trois quarts de leur volume.
Soient v_1, v_2 et v_3 les volumes en litres stockés respectivement les premier, deuxième et troisième samedis après la tonte. De manière générale, soit v_n le volume en litres stocké le n-ième samedi après la tonte.
On convient que $v_0 = 0$.

1) **a)** Vérifier que $v_1 = 120$, $v_2 = 150$ et $v_3 = 157,5$.

b) La suite (v_n) est-elle arithmétique ou géométrique ?

c) Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n.

2) On définit la suite (a_n) des accroissants de (v_n) par :

$$\text{pour tout entier } n \geqslant 1, \quad a_n = v_n - v_{n-1}.$$

a) Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, $\quad a_{n+1} = \dfrac{1}{4}a_n$.
Que peut-on en déduire pour la suite (a_n) ?

b) Exprimer a_n en fonction de n.

3) En remarquant que $v_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, exprimer v_n en fonction de n.

4) Les conditions restant les mêmes, le bac de stockage débordera-t-il un jour ?

Exercice 50

Dans une société, en 2005, il y a 15 employés. Chaque employé est payé $30\,000$ € par an.
L'entreprise envisage d'embaucher chaque année deux personnes de plus.
O appelle u_n la masse salariale de l'année $2005 + n$ en milliers d'euros. Ainsi u_3 représente la masse salariale de l'année 2008.

1) **a)** Justifier que $u_0 = 450$.

b) Quelle est la nature de la suite (u_n) ? Exprimer u_n en fonction de n.

c) Quelle serait la masse salariale en 2012 ?

2) On appelle S_n la somme $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.

a) Montrer que $S_n = 30n^2 + 480n + 450$.

b) En quelle année la somme des salaires versées depuis 2005 dépassera-t-elle dix millions d'euros ?