Terminale S_4 – corrigé des exercices sur certaines lois de probabilité

EXERCICE 1

$$a < 0 \text{ et } f(x) = \begin{cases} \dfrac{a-x}{2a} & \text{si } a \leqslant x < 0 \\ \dfrac{2-x}{4} & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 2 \end{cases}$$

1. *Représentation graphique de* f

   Elle est disponible ici : ex1.ggb. On peut utiliser le curseur pour changer la valeur de a.

2. *Valeur de* a *pour que* f *soit une densité de probabilité*

   On vérifie facilement que f est positive sur $[0\ ;\ 2]$, continue sur $[0\ ;\ 2]$ en démontrant que f est continue en 0, c'est-à-dire, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = f(0) = \dfrac{1}{2}$.

   D'autre part, $\displaystyle\int_a^2 f(x)\,dx = \frac{(-a+2)\times\frac{1}{2}}{2} = \frac{2-a}{4}$.

   Ainsi, f est une densité de probabilité, si et seulement si, $\dfrac{2-a}{4} = 1$ soit $a = -2$.

3. *Calcul de* $P(-1 \leqslant X \leqslant 1)$ *lorsque* $a = -2$

   On peut représenter f lorsque $a = -2$.
   En utilisant la symétrie de la représentation graphique de f on a :

$$P(-1 \leqslant X \leqslant 1) = \int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 2 \times \frac{\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)\times 1}{2} = \frac{3}{4} = 0{,}75.$$

EXERCICE 2

On note N la variable aléatoire égale à la note attribuée à un élève. D'après l'énoncé, N suit la loi uniforme sur $[5\ ;\ 15]$.

1. *Probabilité qu'un élève ait une note supérieure à* 12

   On cherche $P(N \geqslant 12)$ et on a $P(N \geqslant 12) = P(12 \leqslant N \leqslant 15) = \dfrac{15-12}{15-5} = \dfrac{3}{10} = 0{,}3$.

2. *Note moyenne qu'un élève peut espérer obtenir*

   $E(N) = \dfrac{5+15}{2} = 10$. Un élève peut donc espérer obtenir 10 à ce devoir.

3. *Probabilité que la note soit supérieure à* 14 *sachant qu'elle est supérieure à* 12

   Posons $A = \{N \geqslant 12\}$ et $B = \{N \geqslant 14\}$. On cherche $P_A(B)$ et on a $P_A(B) = \dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}$.

   Or, $A \cap B = B$ donc $P(A\cap B) = P(B) = P(14 \leqslant N \leqslant 15) = \dfrac{15-14}{15-5} = \dfrac{1}{10} = 0{,}1$.

   Ainsi, $P_A(B) = \dfrac{0{,}1}{0{,}3} = \dfrac{1}{3}$.

EXERCICE 3

1. a. *Fonction de densité de la loi suivie par* T

   T suit la loi uniforme sur $[15\ ;\ 20]$ donc la densité est la fonction f définie pour tout réel t de $[15\ ;\ 20]$ par $f(t) = \dfrac{1}{20-15} = \dfrac{1}{5}$.

   b. *Durée moyenne du trajet de Raphaël*

   $E(T) = \dfrac{15+20}{2} = 17{,}5$. Le trajet dure en moyenne 17 minutes 30 secondes.

   c. *Probabilité qu'il mette moins de* 17 *minutes pour se rendre au lycée*

   On cherche $P(T \leqslant 17)$ et on a $P(T \leqslant 17) = P(15 \leqslant T \leqslant 17) = \dfrac{17-15}{20-15} = \dfrac{2}{5} = 0{,}4$.

   d. *Sachant que le trajet dure plus de* 16 *minutes, probabilité qu'il mette moins de* 19 *minutes pour se rendre au lycée*

   On pose $C = \{T \geqslant 16\}$ et $D = \{T \leqslant 19\}$. On cherche $P_C(D)$ et on a $P_C(D) = \dfrac{P(C \cap D)}{P(C)}$.

   Or $P(C) = P(16 \leqslant T \leqslant 20) = \dfrac{20-16}{20-15} = \dfrac{4}{5} = 0{,}8$ et $C \cap D = \{T \geqslant 16\} \cap \{T \leqslant 19\} = \{16 \leqslant T \leqslant 19\}$ donc $P(C \cap D) = \dfrac{19-16}{20-15} = \dfrac{3}{5} = 0{,}6$.

   Ainsi, $P_C(D) = \dfrac{0{,}6}{0{,}8} = \dfrac{3}{4} = 0{,}75$.

2. *Probabilité que, sur une semaine, au moins un trajet ait duré plus de* 19 *minutes*

   Soit Z le nombre de jours où le trajet a duré plus de 19 minutes. On vérifie facilement que Z suit la loi binomiale de paramètres $p = P(T \geqslant 19) = P(19 \leqslant T \leqslant 20) = \dfrac{20-19}{20-15} = \dfrac{1}{5} = 0{,}2$ et $n = 5$.

   On cherche $P(Z \geqslant 1)$ et on a $P(Z \geqslant 1) = 1 - P(Z < 1) = 1 - P(Z = 0) = 1 - q^5$ avec $q = 1 - p = 0{,}8$.

   Ainsi, $P(Z \geqslant 1) = 1 - 0{,}8^5 = 0{,}672\,32$.