Fonctions continues

Terminale S
Lycée Charles PONCET

Octobre 2012

Table des matières

Le symbole ✏ indique les exemples à traiter, des démonstrations à trouver.
Le symbole ☛ indique des points importants, des pièges possibles, des notations particulières, etc.

1 Fonctions continues

1.1 Fonction continue en a (a réel)

On considère une fonction numérique f définie sur un intervalle ouvert contenant le nombre réel a.

Dans le chapitre sur les limites d'une fonction numérique, on a donné la définition d'une fonction continue en a que l'on rappelle ci-dessous.

Définition 1.1.1
On dit que f *est* continue *en* a *lorsque* f *possède une limite en* a *égale à* $f(a)$.

✏ On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2x+1$ si $x \leqslant -1$ et $f(x) = x^2 + m$ si $x > -1$. Déterminer le nombre réel m pour que f soit continue en -1.

1.2 Fonction continue sur un intervalle

Définition 1.2.1
Une fonction numérique f *est* continue *sur un intervalle ouvert (non vide)* I *lorsqu'elle est continue pour tout* $a \in I$.

☛ La représentation d'une fonction continue sur l'intervalle I est « d'un seul tenant ».

Théorème 1.2.1 (admis)

1. *La somme, le produit de deux fonctions continues est une fonction continue.*
2. *Le quotient de deux fonctions continues est une fonction continue lorsque le quotient est défini.*
3. *Si* f *est une fonction définie sur un intervalle ouvert* I *contenant* a *et continue en* a, *si* g *est une fonction définie sur un intervalle ouvert* J *contenant* $f(I)$ *et continue en* $b = f(a)$, *alors* $g \circ f$ *est continue en* a.

Théorème 1.2.2

1. *Les fonctions polynômes sont continues sur* $\mathbb{R}$.
2. *La fonction valeur absolue :* $x \longmapsto |x|$ *est continue sur* $\mathbb{R}$.
3. *La fonction racine carrée :* $x \longmapsto \sqrt{x}$ *est continue sur* $[0\ ;\ +\infty[$.
4. *Les fonctions rationnelles sont continues sur les intervalles où elles sont définies.*

2 Applications de la continuité

2.1 Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème 2.1.1
On considère une fonction numérique f *continue sur un intervalle ouvert (non vide)* I *et* $a \in I$, $b \in I$. *Pour tout nombre réel* k *compris entre* $f(a)$ *et* $f(b)$, *il existe un nombre réel* c *compris entre* a *et* b *tel que* $f(c) = k$.

☛ Ce théorème signifie que la fonction f prend au moins une fois toutes les valeurs comprises entre $f(a)$ et $f(b)$.

Conséquence

Si une fonction est continue sur un intervalle et change de signe sur cet intervalle alors cette fonction s'annule au moins une fois.

Interprétation graphique

Lorsque f est une fonction continue sur un intervalle ouvert (non vide) I et $a \in I$, $b \in I$, alors pour tout k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, la droite d'équation $y = k$ coupe au moins une fois la représentation graphique de f en un point C d'abscisse c comprise entre a et b.

✏ Faire cette représentation graphique et vérifier que le théorème est mis en défaut si f n'est pas continue.

Interprétation en terme d'équation

Lorsque f est une fonction continue sur un intervalle ouvert (non vide) I et $a \in I$, $b \in I$, alors pour tout k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ possède au moins une solution c comprise entre a et b.

2.2 Théorème des fonctions continues strictement monotones

Définition 2.2.1
Une fonction numérique f *est continue sur l'intervalle* $I = [a\,;\,b]$ *(avec* $a < b$*) lorsque* f *est continue sur* $]a\,;\,b[$ *et lorsque* f *possède une limite à droite en* a *égale à* $f(a)$ *(*f *est* continue à droite *en* a*) et une limite à gauche en* b *égale à* $f(b)$ *(*f *est* continue à gauche *en* b*).*

Théorème 2.2.1
Si f *est une fonction continue et strictement monotone sur l'intervalle* $I = [a\,;\,b]$ *(avec* $a < b$*) alors pour tout nombre réel* k *compris entre* $f(a)$ *et* $f(b)$ *il existe un seul nombre* c *tel que* $f(c) = k$*.*

☛ Ce théorème signie que l'équation $f(x) = k$ possède une solution unique c dans $[a\,;\,b]$.

✏ L'existence de c est donnée par le théorème des valeurs intermédiaires, pour prouver son unicité, raisonner par l'absurde et utiliser la monotonie stricte de f.

Le théorème des fonctions continues strictement monotones est mis en défaut si la fonction n'est pas continue ou si elle n'est pas strictement monotone. Représenter graphiquement ces différents cas.

Convention

Dans un tableau de variation, les flèches obliques traduisent la continuité et la stricte monotonie de la fonction sur l'intervalle considéré.

Extensions à d'autres types d'intervalles

Le théorème des fonctions continues strictement monotones se généralise aux intervalles ouverts ou semi-ouverts, bornés ou non, a et b pouvant désigner $+\infty$ ou $-\infty$, $f(a)$ ou $f(b)$ étant éventuellement remplacés par des limites finies ou non.
✏ Construire des tableaux de variation correspondants à $[a\,;\,+\infty[$, $[a\,;\,b[$, $]-\infty\,;\,+\infty[$.

Définition 2.2.2
Une fonction d'un ensemble E *dans un ensemble* F *est une* bijection de E sur F *lorsque tout élément de* F *possède un antécédent unique dans* E*.*

☛ La fonction carré : $x \longmapsto x^2$ est une bijection de $[0\,;\,+\infty[$ sur $[0\,;\,+\infty[$ mais ce n'est pas une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

Corollaire 2.2.2 (autre formulation du théorème 2.2.1)
Une fonction numérique f *continue et strictement monotone sur un intervalle* I *est une bijection de l'intervalle* I *sur l'intervalle* $f(I)$*.*

☛ Lorsque $I = [a\ ;\ b]$ (avec $a < b$), $f(I) = [f(a)\ ;\ f(b)]$ lorsque f est strictement croissante et $f(I) = [f(b)\ ;\ f(a)]$ lorsque f est strictement décroissante.

Corollaire 2.2.3
Lorsque qu'une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I *change de signe sur* I *alors* f *s'annule une fois et une seule sur* I.

✏ Démontrer que l'équation $2x^3 - 9x^2 + 12x - 4{,}5 = 0$ possède exactement trois solutions dont l'une est 1,5. Déterminer les valeurs des deux autres.

☛ On ne peut pas toujours déterminer les valeurs exactes des solutions de l'équation $f(x) = 0$, on peut alors chercher des approximations décimales des solutions par la méthode du *balayage*.