Terminales S (enseignement de spécialité)
Deux exercices du baccalauréat, session de 2014

1 Amérique du Nord 2014

Un volume constant de 2200 m^3 d'eau est réparti entre deux bassins A et B.
Le bassin A refroidit une machine. Pour des raisons d'équilibre thermique on crée un courant d'eau entre les deux bassins à l'aide de deux pompes.

On modélise les échanges entre les deux bassins de la façon suivante :

- au départ, le bassin A contient 1100 m^3 d'eau et le bassin B contient 1100 m^3 d'eau ;
- tous les jours, 15 % du volume d'eau présent en début de journée dans le bassin B est transféré vers le bassin A ;
- tous les jours, 10 % du volume d'eau présent en début de journée dans le bassin A est transféré vers le bassin B, et pour des raisons de maintenance, on transfère également 5 m^3 du bassin A vers le bassin B.

Pour tout entier naturel n, on note :

- a_n le volume d'eau, exprimé en m^3, contenu dans le bassin A à la fin du n-ième jour de fonctionnement ;
- b_n le volume d'eau, exprimé en m^3, contenu dans le bassin B à la fin du n-ième jour de fonctionnement.

On a donc $a_0 = 1\,100$ et $b_0 = 1\,100$.

Les parties A et B peuvent être traitées de manière indépendante.

Partie A

1. Traduire la conservation du volume total d'eau du circuit par une relation liant a_n et b_n.
2. On utilise un tableur pour visualiser l'évolution du volume d'eau dans les bassins.
   Donner les formules à écrire et à recopier vers le bas dans les cellules B3 et C3 permettant d'obtenir la feuille de calcul ci-dessous :

	A	B	C
1	Jour n	Volume bassin A	Volume bassin B
2	0	1 100,00	1 100,00
3	1		
4	2	1 187,50	1 012,50
5	3	1 215,63	984,38
6	4	1 236,72	963,28
7	5	1 252,54	947,46
8	6	1 264,40	935,60
9	7	1 273,30	926,10
10	8	1 279,98	920,02
11	9	1 234,98	915,02
12	10	1 288,74	911,26
13	11	1 291,55	908,45
14	12	1 293,66	906,34
15	13	1 295,25	904,75
16	14	1 296,44	903,56
17	15	1 297,33	902,67
18	16	1 298,00	902,00
19	17	1 298,50	901,50
20	18	1 298,87	901,13

3. Quelles conjectures peut-on faire sur l'évolution du volume d'eau dans chacun des bassins ?

Partie B

On considère la matrice carrée $M = \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}15 \\ 0{,}1 & 0{,}85 \end{pmatrix}$ et les matrices colonnes $R = \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$.
On admet que, pour tout entier naturel n, $X_{n+1} = MX_n + R$.

1. On note $S = \begin{pmatrix} 1\,300 \\ 900 \end{pmatrix}$.

   Vérifier que $S = MS + R$.
   En déduire que, pour tout entier naturel n, $X_{n+1} - S = M\left(X_n - S\right)$.

   Dans la suite, on admettra que, pour tout entier naturel n, $X_n - S = M^n \times (X_0 - S)$ et que $M^n = \begin{pmatrix} 0{,}6 + 0{,}4 \times 0{,}75^n & 0{,}6 - 0{,}6 \times 0{,}75^n \\ 0{,}4 - 0{,}4 \times 0{,}75^n & 0{,}4 + 0{,}6 \times 0{,}75^n \end{pmatrix}$.
2. Montrer que, pour tout entier naturel n, $X_n = \begin{pmatrix} 1\,300 - 200 \times 0{,}75^n \\ 900 + 200 \times 0{,}75^n \end{pmatrix}$.
3. Valider ou invalider les conjectures effectuées à la question 3 de la partie A.
4. On considère que le processus est stabilisé lorsque l'entier naturel n vérifie :

$$1\,300 - a_n < 1,5 \text{ et } b_n - 900 < 1,5.$$

   Déterminer le premier jour pour lequel le processus est stabilisé.

2 Liban 2014

Un laboratoire étudie la propagation d'une maladie sur une population.
Un *individu sain* est un individu n'ayant jamais été touché par la maladie.
Un *individu malade* est un individu qui a été touché par la maladie et non guéri.
Un *individu guéri* est un individu qui a été touché par la maladie et qui a guéri.
Une fois guéri, un individu est immunisé et ne peut plus tomber malade.
Les premières observations nous montrent que, d'un jour au jour suivant :

- 5 % des individus tombent malades ;
- 20 % des individus guérissent.

Pour tout entier naturel n, on note a_n la proportion d'individus sains n jours après le début de l'expérience, b_n la proportion d'individus malades n jours après le début de l'expérience, et c_n celle d'individus guéris n jours après le début de l'expérience.
On suppose qu'au début de l'expérience, tous les individus sont sains, c'est-à-dire que $a_0 = 1$, $b_0 = 0$ et $c_0 = 0$.

1. Calculer a_1, b_1 et c_1.
2. a. Quelle est la proportion d'individus sains qui restent sains d'un jour au jour suivant ?
   En déduire a_{n+1} en fonction de a_n.

   b. Exprimer b_{n+1} en fonction de a_n et de b_n.

   On admet que $c_{n+1} = 0{,}2b_n + c_n$.

   Pour tout entier naturel n, on définit $U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$.

   On définit les matrices $A = \begin{pmatrix} 0{,}95 & 0 & 0 \\ 0{,}05 & 0{,}8 & 0 \\ 0 & 0{,}2 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 0{,}95 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

On admet qu'il existe une matrice inversible P telle que $D = P^{-1} \times A \times P$ et que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, $A^n = P \times D^n \times P^{-1}$.

3. a. Vérifier que, pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = A \times U_n$.

   On admet que, pour tout entier naturel n, $U_n = A^n \times U_0$.

   b. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul, $D^n = \begin{pmatrix} 0{,}95^n & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}8^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On admet que $A^n = \begin{pmatrix} 0{,}95^n & 0 & 0 \\ \dfrac{1}{3}\left(0{,}95^n - 0{,}8^n\right) & 0{,}8^n & 0 \\ \dfrac{1}{3}\left(3 - 4 \times 0{,}95^n + 0{,}8^n\right) & 1 - 0{,}8^n & 1 \end{pmatrix}$.

4. a. Vérifier que pour tout entier naturel n, $b_n = \dfrac{1}{3}\left(0{,}95^n - 0{,}8^n\right)$.

   b. Déterminer la limite de la suite (b_n).

   c. On admet que la proportion d'individus malades croît pendant plusieurs jours, puis décroît.

   On souhaite déterminer le pic épidémique, c'est-à-dire le moment où la proportion d'individus malades est à son maximum.

   À cet effet, on utilise l'algorithme donné en annexe, dans lequel on compare les termes successifs de la suite (b_n).

   Compléter l'algorithme de façon qu'il affiche le rang du jour où le pic épidémique est atteint et compléter le tableau fourni en annexe.

   Conclure.

Exercice du baccalauréat S, Liban, 2014

Algorithme et tableau à compléter

Variables :	b, b', x, y sont des réels
	k est un entier naturel
Initialisation :	Affecter à b la valeur 0
	Affecter à b' la valeur 0,05
	Affecter à k la valeur 0
	Affecter à x la valeur 0,95
	Affecter à y la valeur 0,8
Traitement :	Tant que $b < b'$ faire :
	Affecter à k la valeur $k+1$
	Affecter à b la valeur b'
	Affecter à x la valeur $0{,}95x$
	Affecter à y la valeur $0{,}80y$
	Affecter à b' la valeur $\cdots\cdots$
	Fin Tant que
Sortie :	Afficher $\cdots\cdots$

	k	b	x	y	b'	Test : $b < b'$?
Après le 7^{e} passage dans la boucle Tant que	7	0,162 8	0,663 4	0,167 8	0,165 2	VRAI
Après le 8^{e} passage éventuel dans la boucle Tant que						
Après le 9^{e} passage éventuel dans la boucle Tant que						