Séries numériques

Section de techniciens supérieurs
Informatique et réseaux pour l'industrie et les services techniques
Lycée Charles PONCET

Décembre 2010

Table des matières

Le symbole ✏ indique les exemples à traiter, des démonstrations à trouver.
Le symbole ☛ indique des points importants, des pièges possibles, des notations particulières, etc.

1 Notion de séries numériques

1.1 Définitions

Considérons la suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :
$s_0 = u_0$
$s_1 = u_0 + u_1 = s_0 + u_1$
$s_2 = u_0 + u_1 + u_2 = s_1 + u_2$
$s_3 = s_2 + u_3$
$\vdots$
$s_n = s_{n-1} + u_n$.
On peut écrire $s_n = \displaystyle\sum_{p=0}^{n} u_p$. Le nombre s_n est appelé *somme partielle* de la série de terme général u_n.

Définition 1.1.1
Si (u_n) *est une suite numérique, la suite de terme général* (s_n) *est appelée* série numérique *de terme général* u_n*, notée parfois* $\sum u_n$ *ou* $((u_n))$.
Si la suite (s_n) *converge vers le nombre* S *(c'est-à-dire possède une limite finie* S*), on dit que la série de terme général* u_n converge *vers* S*, et on peut alors écrire :*

$$S = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots \ \textit{ou}\ S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n.$$

S *est alors appelée* somme *de la série de terme général* u_n.
Dans les autres cas, c'est-à-dire quand la suite (s_n) *a pour limite* $+\infty$ *ou* $-\infty$ *ou quand la suite* (s_n) *n'a pas de limite, on dit que la série de terme général* u_n diverge.

✏ Montrer que la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{4^n}$ converge et calculer sa somme.

✏ Montrer que la série de terme général $v_n = 2n + 1$ diverge.

Théorème 1.1.1
Si le terme général d'une série numérique ne tend pas vers 0*, la série diverge.*

☛ La réciproque du théorème précédent est fausse. Il existe des séries dont le terme général tend vers 0 qui divergent.

2 Séries de référence

2.1 Séries géométriques

Définition 2.1.1
On appelle série géométrique *toute série dont le terme général est* q^n *où* q *est un nombre réel (ou complexe) non nul.*

Théorème 2.1.1
La série géométrique de terme général q^n *(avec* $q \neq 0$*) converge si et seulement si* $|q| < 1$ *et dans ce cas* $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$.

✏ Calculer $s_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k$ et examiner la convergence de la suite (s_n).

2.2 Séries de RIEMANN[1]

Définition 2.2.1
On appelle série de RIEMANN *toute série dont le terme général est* $\dfrac{1}{n^\alpha}$ *avec* $\alpha \in \mathbb{R}$.

Théorème 2.2.1
La série de RIEMANN *de terme général* $\dfrac{1}{n^\alpha}$ *(avec* $\alpha \in \mathbb{R}$*) converge si et seulement si* $\alpha > 1$.
Elle diverge si et seulement si $\alpha \leqslant 1$.

☛ Ce théorème est admis.
Ce théorème est analogue à celui concernant la convergence des intégrales de RIEMANN.
Il sert (comme pour les intégrales impropres) à trouver la nature d'un grand nombre de séries numériques.

Exemples

① Si $\alpha = 1$, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n}$ diverge (cette série est appelée *série harmonique*).

☛ On peut remarquer que $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n}$ diverge bien que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$.

② Si $\alpha = 2$, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^2}$ converge. On verra dans le chapitre sur les séries de FOURIER que cette série converge vers $\dfrac{\pi^2}{6}$.

3 Séries à termes positifs

3.1 Généralités

Théorème 3.1.1
Si $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *sont deux séries à termes positifs à partir d'un certain rang et si, à partir d'un certain rang* $u_n \leqslant v_n$*, alors la convergence de* $\sum v_n$ *entraine la convergence de* $\sum u_n$ *et la divergence de* $\sum u_n$ *entraine la divergence de* $\sum v_n$.

✏ Étudier la nature des séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ avec $u_n = \dfrac{3}{n^2+1}$ et $v_n = \dfrac{\sqrt{n}}{n-1}$ (avec $n \geqslant 2$).

Théorème 3.1.2
Si $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *sont deux séries à termes positifs à partir d'un certain rang et si, au voisinage de* $+\infty$, $u_n \sim v_n$*, alors les séries* $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *sont de même nature.*

✏ Étudier la nature des séries $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{3}{n^2+1}$ et $\sum\limits_{n\geqslant 2} \dfrac{\sqrt{n}}{n-1}$ en utilisant le théorème 3.1.2.

3.2 Règle de d'ALEMBERT[2]

Théorème 3.2.1 (Règle de d'ALEMBERT)
Soit $\sum u_n$ *une série à termes positifs. On suppose que* $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$*, on a alors :*
- *si* $\ell < 1$*, la série* $\sum u_n$ *converge ;*
- *si* $\ell > 1$*, la série* $\sum u_n$ *diverge.*

1. Bernhard RIEMANN, mathématicien allemand (1826-1866) dont les travaux ont porté notamment sur le calcul intégral et les fonctions de variables complexes et ont eu une influence considérable.
2. Jean Le Rond d'ALEMBERT, mathématicien et philosophe français, 1717-1783.

☛ Le théorème 3.2.1 ne permet pas de conclure lorsque $\ell = 1$.
La règle de d'ALEMBERT est souvent utilisée pour étudier la nature des séries à termes positifs dont l'expression du terme général utilise la fonction « factorielle » (cf. l'exemple suivant).

✏ Étudier la nature de la série $\sum u_n$ avec $u_n = \dfrac{n+1}{n!}$.
On rappelle que $0\,! = 1$, $1\,! = 1$ et si $n \geqslant 2$ alors $n\,! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n$.

3.3 Séries absolument convergentes

Définition 3.3.1
Une série $\sum u_n$ *est* absolument convergente *si la série* $\sum |u_n|$ *converge.*

Théorème 3.3.1
Une série absolument convergente converge.

✏ Étudier la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{\cos n}{n^2}$.

4 Exercices

Dans les cinq exercices suivants, étudier la convergence des séries numériques dont le terme général est u_n.

1. a. $u_n = \dfrac{2n+1}{n}$ avec $n \geqslant 1$.
   b. $u_n = \dfrac{2}{n^5}$ avec $n \geqslant 1$.
2. a. $u_n = \dfrac{n+1}{n^4}$ avec $n \geqslant 1$.
   b. $u_n = \dfrac{2n-3}{n^2+1}$.
3. a. $u_n = \dfrac{n}{\sqrt{n^3+1}}$.
   b. $u_n = \dfrac{1}{e^n}$ (*calculer la somme*).
4. a. $u_n = \dfrac{n}{3^n}$.
   b. $u_n = \dfrac{\sqrt{n}}{n\,!}$.
5. a. $u_n = \dfrac{2^n}{n^2}$.
   b. $u_n = \dfrac{\sqrt{n}}{3^n}$.