Équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants

Section de techniciens supérieurs
Informatique et réseaux pour l'industrie et les services techniques
Lycée Charles PONCET

Octobre 2010

Table des matières

Le symbole ✏ indique les exemples à traiter, des démonstrations à trouver.
Le symbole ☛ indique des points importants, des pièges possibles, des notations particulières, etc.

Dans tout le chapitre, les intervalles sont des intervalles de $\mathbb{R}$ ouverts et non vides, le plus souvent l'intervalle est l'ensemble $\mathbb{R}$.

1 Généralités sur les équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants

1.1 Définitions

Définition 1.1.1
Une équation différentielle linéaire *du second ordre à* coefficients constants *est une équation différentielle qui peut s'écrire sous la forme* $ay'' + by' + cy = d(t)$ *où* $a \neq 0$*,* b *et* c *sont trois constantes réelles ou complexes et* d *une fonction continue sur un intervalle* I *de* $\mathbb{R}$ *et à valeurs dans* $\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$*.*
$d(t)$ *est appelé le* second membre *de l'équation différentielle.*

Définition 1.1.2
On appelle équation différentielle sans second membre associée *à* $ay'' + by' + cy = d(t)$*, l'équation différentielle* $ay'' + by' + cy = 0$*. On dit aussi qu'il s'agit de* l'équation homogène associée.

1.2 Exemples

✏ $y'' + 4y' + 3y = -6t - 5$ est une équation différentielle du second ordre. L'équation homogène associée est $y'' + 4y' + 3y = 0$.

Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = -2t + 1$ est une solution de l'équation $y'' + 4y' + 3y = -6t - 5$.

Montrer que $t \mapsto e^{-t}$ et $t \mapsto e^{-3t}$ sont deux solutions de l'équation homogène $y''+4y'+3y = 0$.

2 Résolution de l'équation sans second membre

2.1 Propriétés des solutions

Théorème 2.1.1
. Soient $a \neq 0$*,* b *et* c *trois constantes réelles ou complexes.*

1. *Si* f_1 *et* f_2 *sont deux solutions de l'équation différentielle* $ay'' + by' + cy = 0$*, alors* $f_1 + f_2$ *est solution de l'équation* $ay'' + by' + cy = 0$*.*
2. *Si* f *est une solution de l'équation différentielle* $ay'' + by' + cy = 0$*, et si* k *est une constante réelle ou complexe, alors* kf *est solution de l'équation* $ay'' + by' + cy = 0$*.*

Ces deux propriétés justifient le nom d'équations différentielles linéaires *donné à ces équations.*

✏ Démontrer le théorème 2.1.1.

2.2 Théorème fondamental

Nous admettons le théorème 2.2.1.

Théorème 2.2.1
Si $a \neq 0$*,* b *et* c *sont trois nombres réels ou complexes, les solutions de* $ay'' + by' + cy = 0$ *sont les fonctions* y *définies par* $y(t) = C_1y_1(t) + C_2y_2(t)$ *où* y_1 *et* y_2 *sont deux solutions indépendantes (c'est-à-dire dont le rapport n'est pas constant) de l'équation* $ay'' + by' + cy = 0$ *et* C_1*,* C_2 *deux constantes réelles ou complexes.*

✏ En utilisant les résultats de l'exemple du paragraphe 1.2, déterminer la solution générale de l'équation $y'' + 4y' + 3y = 0$.

2.3 Équation caractéristique

✏ Montrer que la fonction $t \mapsto e^{rt}$ où $r \in \mathbb{C}$ est une solution de $ay'' + by' + cy = 0$ si et seulement si r est une solution de l'équation $ar^2 + br + c = 0$.

Définition 2.3.1
On appelle équation caractéristique *de l'équation différentielle* $ay'' + by' + cy = 0$, $a \neq 0$, b *et* c *étant trois constantes réelles ou complexes, l'équation* $ar^2 + br + c = 0$ *d'inconnue réelle ou complexe* r.

☛ *Dans la suite du chapitre, on supposera que les coefficients* $a \neq 0$, b *et* c *sont réels.*

2.4 Résolution de $ay'' + by' + cy = 0$

On note $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant de l'équation caractéristique $ar^2 + br + c = 0$.

2.4.1 Résolution lorsque $\Delta > 0$

✏ Soient r_1 et r_2 les solutions de l'équation caractéristique.
Montrer que les solutions $t \mapsto e^{r_1 t}$ et $t \mapsto e^{r_2 t}$ de l'équation $ay'' + by' + cy = 0$ sont indépendantes. En déduire la solution générale de $ay'' + by' + cy = 0$ lorsque $\Delta > 0$.

Appliquer ce résultat pour résoudre l'équation $y'' + 3y' + 2y = 0$.

2.4.2 Résolution lorsque $\Delta = 0$

✏ Soit r_0 la solution double de l'équation caractéristique.
Montrer que $t \mapsto te^{r_0 t}$ est également une solution de $ay'' + by' + cy = 0$.
Montrer que les fonctions $t \mapsto e^{r_0 t}$ et $t \mapsto te^{r_0 t}$ sont indépendantes. En déduire la solution générale de $ay'' + by' + cy = 0$ lorsque $\Delta = 0$.

Appliquer ce résultat pour résoudre l'équation $y'' + 6y' + 9y = 0$.

2.4.3 Résolution lorsque $\Delta < 0$

✏ Soient $r_1 = \alpha + i\beta$ et $r_2 = \alpha - i\beta$ (α et $\beta \neq 0$ étant deux réels) les deux solutions complexes conjuguées de l'équation caractéristique.
Montrer que $t \mapsto e^{\alpha t}\cos(\beta t)$ et $t \mapsto e^{\alpha t}\sin(\beta t)$ sont deux solutions indépendantes de l'équation $ay'' + by' + cy = 0$. En déduire la solution générale de $ay'' + by' + cy = 0$ lorsque $\Delta < 0$.

Appliquer ce résultat pour résoudre l'équation $y'' + 2y' + 5y = 0$.

2.4.4 Conclusion

Théorème 2.4.1 (résolution dans $\mathbb{R}$)
Soit l'équation différentielle $ay'' + by' + cy = 0$, $a \neq 0$, b *et* c *étant trois constantes réelles. On note* $\Delta = b^2 - 4ac$ *le discriminant de l'équation caractéristique.*
La solution générale de l'équation différentielle $ay'' + by' + cy = 0$ *est la fonction* y *définie par :*

- *si* $\Delta > 0$*, l'équation caractéristique a deux racines réelles distinctes* r_1 *et* r_2*,*

$$y(t) = \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t},\ \lambda \text{ et } \mu \text{ étant deux constantes réelles ;}$$

- *si* $\Delta = 0$*, l'équation caractéristique a une racine double réelle* r_0*,*

$$y(t) = (\lambda t + \mu)e^{r_0 t},\ \lambda \text{ et } \mu \text{ étant deux constantes réelles ;}$$

- *si* $\Delta < 0$*, l'équation caractéristique a deux solutions complexes conjuguées distinctes (non réelles)* $r_1 = \alpha + i\beta$ *et* $r_2 = \alpha - i\beta$ *(*α *et* $\beta \neq 0$ *réels),*

$$y(t) = (\lambda \cos \beta t + \mu \sin \beta t)e^{\alpha t},\ \lambda \text{ et } \mu \text{ étant deux constantes réelles.}$$

☛ Lorsque $\Delta < 0$, la solution générale de $ay'' + by' + cy = 0$ peut s'écrire $y(t) = Ae^{\alpha t}\cos(\beta t + \varphi)$ ou $y(t) = Be^{\alpha t}\sin(\beta t + \theta)$, avec A, B, φ et θ des constantes réelles.

✏ Déterminer les solutions de l'équation différentielle $y'' - 2y' + 2y = 0$ définies sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

3 Résolution de l'équation avec second membre

3.1 Méthode générale de résolution

Théorème 3.1.1
La solution générale de l'équation $ay" + by' + cy = d(t)$ *où* $a \neq 0$, b *et* c *sont trois nombres réels et* d *une fonction continue sur un intervalle* I *est la somme d'une solution particulière de l'équation complète et de la solution générale de l'équation homogène associée.*

✏ Vérifier que la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(t) = \dfrac{1}{t}$ est une solution particulière de l'équation $y'' + 4y = \dfrac{4t^2+2}{t^3}$. En déduire la solution générale de cette équation différentielle.

3.2 Recherche d'une solution particulière de l'équation avec second membre

On utilise les propriétés suivantes pour résoudre l'équation $ay" + by' + cy = d(t)$ (*en général, la forme de la solution particulière est indiquée dans l'énoncé de l'exercice*) :

- lorsque d est une fonction polynôme, une solution particulière est une fonction polynôme de même degré ;
- lorsque $d(t) = P(t)e^{kt}$ où P est une fonction polynôme de degré n et k une constante non nulle, une solution particulière f est de la forme $f(t) = Q(t)e^{kt}$ où Q est une fonction polynôme de degré n, $n+1$ ou $n+2$;
- lorsque $d(t) = (A\cos\omega t + B\sin\omega t)e^{kt}$ où A, B, $\omega \neq 0$ et $k \neq 0$ sont des constantes (A et B n'étant pas simultanément nuls), une solution particulière f est, en général, de la forme $f(t) = (\alpha\cos\omega t + \beta\sin\omega t)e^{kt}$ (α et β étant deux constantes).

✏ Résoudre les équations différentielles suivantes en recherchant la solution particulière f qui est indiquée :

1. $y'' - 3y' + 2y = t^2 + t + 1$ avec $f(t) = at^2 + bt + c$.
2. $y'' + y = 2t^2e^t$ avec $f(t) = (at^2 + bt + c)\,e^t$.
3. $y'' - y = 2t^2e^t$ avec $f(t) = (at^3 + bt^2 + ct)\,e^t$.
4. $y'' - 2y' + y = 2t^2e^t$ avec $f(t) = \left(at^4 + bt^3 + ct^2\right)e^t$.
5. $y'' + y = e^t\cos t$ avec $f(t) = (\alpha\cos t + \beta\sin t)\ e^t$.

3.3 Solution de $ay'' + by' + cy = d(t)$ vérifiant des conditions initiales

Théorème 3.3.1
a, b *et* c *étant des constantes avec* $a \neq 0$ *et* d *une fonction continue sur un intervalle* I, *il existe une seule fonction* f, *deux fois dérivable sur* I *et à valeurs dans* $\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$, *solution de l'équation* $ay'' + by' + cy = d(t)$, *qui vérifie* $f(t_0) = y_0$ *et* $f'(t_0) = y'_0$ *avec* $t_0 \in I$, y_0 *et* y'_0 *étant des constantes réelles ou complexes.*
Les conditions $f(t_0) = y_0$ *et* $f'(t_0) = y'_0$ *sont des* conditions initiales.

☞ Déterminer la solution f de l'équation $y'' + y = e^t\cos t$ qui vérifie $f(0) = 1$ et $f'(0) = 0$.