Contents

Terminale S Exercices du livre- Chapitre 12 Probabilités conditionnelles

Exercices d'entraînement

1. Probabilités élémentaires

Exercice 1 p 368

Astragale : de l'expérimentation au modèle
Les Grecs et les Romains utilisaient à la place des dés, des osselets d'agneaux appelés "astragales".
Ces astragales pouvaient retomber sur l'une de leurs 4 faces, numérotées ici de 1 à 4.
p_i désignant la probabilité qu'un astragale retombe sur la face n° i, des expériences statistiques ont permis d'établir que : $p_1 = p_2$; $p_3 = p_4$ et $p_1 = 4p_3$.
On lance un astragale.

1. Déterminer la loi de probabilité sur $\{1\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;\ 4\}$.
2. Calculer les probabilités des événements :
   - A : "obtenir un n° pair".
   - B : "obtenir le 1 ou le 4"
   - $\mathrm{C} = \overline{\mathrm{A}} \cup \overline{\mathrm{B}}$

Exercice 2 p 368

Un dé pipé est tel que la probabilité d'obtenir chacun des numéros de 1 à 6 est proportionnelle à ce numéro.
On lance le dé.

1. Déterminer la loi de probabilité sur $\{1\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;\ 4\ ;\ 5\ ;\ 6\}$.
2. Calculer la probabilité des événements :
   - E : "obtenir un numéro supérieur strictement à 3";
   - F : "obtenir un multiple de 3"
   - $\mathrm{G} = \overline{\mathrm{E}} \cup F$

Exercice 3 p 368

On tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes.
On considère les événements suivants :

A : "la carte tirée est un pique";

B : "la carte tirée est rouge (carreau ou coeur)";

C : "la carte tirée est une figure (roi, dame ou valet)".

1. En proposer une modélisation (univers et loi).
2. Calculer la probabilité des événements : A ; B ; C ; A $\cap$ B ; B $\cap$ C ; A $\cup$ B ; A $\cup$ C.
3. Calculer la probabilité de l'événement E : "la carte tirée n'est ni un pique ni une figure".

Exercice 4 p 368

répartition et rencontre au hasard
Dans un centre aéré, différentes activités sont proposées, dont le tir à l'arc et l'escalade.
Parmi les 60 jeunes présents ce jour, 45 se sont inscrits au tir à l'arc et 24 à l'escalade.
Sachant que 6 d'entre eux ne sont inscrits à aucune de ces activités, déterminer la probabilité qu'un jeune rencontré au hasard dans le centre pratique aujourd'hui :

a. le tir à l'arc ;
b. l'escalade ;
c. aucun de ces deux sports ;
d. le tir à l'arc ou l'escalade ;
e. le tir à l'arc et l'escalade.

2. Utilisation d'une variable aléatoire

Exercice 5 p 368

nombre moyen de lettres
Chacun des dix mots de la phrase : “Rien ne sert de courir, il faut partir à point” est inscrit sur un carton. Les dix cartons, indiscernables au toucher, sont placés dans un sac. On tire un carton au hasard. On désigne par X la variable aléatoire qui, à chaque tirage, associe le nombre de lettres obtenues.

1. Déterminer la loi de probabilité de X.
2. Quel est, en moyenne, le nombre de lettres que l’on peut obtenir à ce jeu ?

3. Probabilités conditionnelles

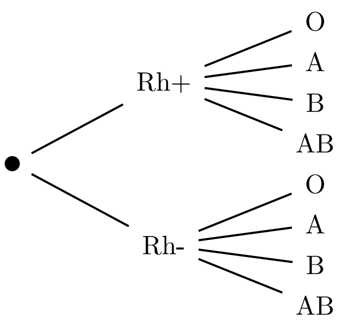
Exercice 8 p 369

Groupes sanguins et facteurs rhésus
Voici le tableau de répartition en pourcentage des principaux groupes sanguins des habitants de la France :

Groupe	0	A	B	AB
Rhésus +	35	38,1	6,2	2,8
Rhésus -	9	7,2	1,2	0,5

Les résultats numériques demandés seront, s’il y a lieu, arrondis à trois décimales.

1. L’objectif de cette question est de compléter à l’aide des données de ce tableau l’arbre suivant que l’on recopiera :



   L’expérience consiste à choisir une personne au hasard dans la population donnée.

   On note Rh+ l’événement “la personne a le facteur Rh+”et p_1 sa probabilité.

   On note O l’événement “la personne appartient au groupe O”et p_2 la probabilité qu’une personne appartienne au groupe O, sachant qu’elle a le facteur Rh+.

   (a) Déterminer p_1 et p_2.

   (b) Compléter le reste de l’arbre.

2. (a) Comment peut-on, à partir de l’arbre complété, déterminer la probabilité de O ?

   (b) Quelle est la probabilité pour qu’une personne appartenant au groupe O ait le facteur Rh+ ?

Exercice 12 p 370

fiabilité
Trois machines fabriquent des ampoules électriques dans les proportions suivantes : 20 % sont fabriquées par la machine A, 50 % par la machine B et 30 % par la machine C.
Les probabilités que les ampoules fabriquées par les machines A, B et C soient bonnes sont respectivement 0,9 ; 0,95 et 0,8.

1. Calculer la probabilité pour qu’une ampoule soit bonne.
2. On achète une ampoule, elle est bonne.

   Quelle est la probabilité pour qu’elle ait été fabriquée par la machine A ?

Exercice 13 p 370

du tricheur à l’as, de l’as au tricheur
On admet qu’un joueur sur trois est un tricheur, et que pour un tricheur, la probabilité d’obtenir un as en tirant une carte d’un jeu de 52 cartes est égale à 1. Pour un non-tricheur, le tirage se fait honnêtement, au hasard.

1. Un joueur tire une carte. Quelle est la probabilité que ce soit un as ?
2. Un joueur tire une carte et c’est un as. Quelle est la probabilité que ce soit un tricheur ?

4. Indépendance de deux événements

Exercice 14 p 370

Le parapluie de Xavier
Une étude météorologique a permis de dégager une loi régissant le temps qu’il fait en début de matinée dans la ville de Xavier.

Temps	pluvieux	nuageux	ensoleillé
Probabilité	0,2	0,3	0,5

En partant le matin, Xavier prend son parapluie

- à coup sur s’il pleut,
- une fois sur deux s’il fait nuageux,
- une fois sur dix s’il fait beau.

Quelle est la probabilité que Xavier emporte son parapluie demain matin?

Exercice 16 p 370

Indépendance et passage au contraire

1. Justifier l’égalité (1) :

$$p(A \cap \overline{B}) = p(A) - p(A \cap B).$$

2. On suppose que A et B sont deux événements indépendants.

   (a) Prouver à l’aide de (1), qu’il en est de même des événements A et $\overline{B}$.

   (b) Que peut-on en déduire pour les événements $\overline{A}$ et B, $\overline{A}$ et $\overline{B}$?

Exercices d'approfondissement

5. Probabilités conditionnelles

Exercice 45 p 375

germera, germera pas ...
Un mélange de graines de fleurs contient :

- 50 graines de type A,
- 90 graines de type B,
- 60 graines de type C.

Toutes les graines n'ont pas le même pouvoir de germination. On conviendra qu'une graine germe correctement si celle-ci donne naissance à une plante qui fleurit. On considère que la probabilité qu'une graine germe correctement et égale à :

- $0,5$ pour une graine de type A,
- $0,8$ pour une graine de type B,
- $0,6$ pour une graine de type C.

On sème une graine prise au hasard dans le mélange. Donner ou calculer :

a. la probabilité que ce soit une graine de type A ;

b. la probabilité que ce soit une graine de type A et que celle-ci germe correctement ;

c. la probabilité que la graine germe correctement ;

d. la probabilité que ce soit une graine de type C qui ne germe pas correctement ;

e. la probabilité que la graine ne germe pas correctement s'il s'agit d'une graine de type C ;

f. la probabilité que ce soit une graine de type C sachant qu'elle n'a pas germé correctement.

Exercice 46 p 375

Le dépistage
Une maladie atteint 3% d'une population donnée. Un test de dépistage donne les résultats suivants :

- chez les individus malades, 95% des tests sont positifs (les autres sont négatifs).
- chez les individus non malades, 99% des tests sont négatifs (les autres sont positifs).

1. Quelle est la probabilité d'avoir un test positif?
2. Quelle est la probabilité d'être malade quand le test est négatif?

   Quelle est la probabilité d'être non malade quand le test est négatif?

6. Problèmes

Exercice 62 p 378

Les résultats numériques seront donnés sous forme de fractions.

Dans une classe de 30 élèves sont formés un club photo et un club théatre. Le club photo est composé de 10 membres, le club théatre de 6 membres. Il y a deux élèves qui sont membres des deux clubs à la fois. On note $\overline{A}$ l'événement contraire de l'évènement A et $p(A/B)$ la probabilité conditionnelle de A sachant que B est réalisé.

1. On interroge un élève de la classe pris au hasard.
   On appelle P l'événement " l'élève fait partie du club photo " et T l'événement " l'élève fait partie du club théatre ". Montrez que les événements P et T sont indépendants.

2. Lors d'une séance du club photo, les 10 membres sont tous présents.

   Un premier élève est tiré au sort. Il doit prendre la photo d'un autre membre du club qui sera lui aussi tiré au sort.

   (a) On appelle T_1 l'événement " le premier élève appartient au club théatre ". Calculez $p(T_1)$.

   (b) On appelle T_2 l'événement " l'élève pris en photo appartient au club théatre ". Calculez $p(T_2/T_1)$, puis $p(T_2/\overline{T_1})$. En déduire $p(T_2 \cap T_1)$ et $p(T_2 \cap \overline{T_1})$. (On pourra éventuellement utiliser un arbre.)

   (c) Montrer que la probabilité que l'élève pris en photo appartienne au club théatre est $0,2$.

3. Toutes les semaines on recommence de façon indépendante la séance de photographie avec tirage au sort du photographe et du photographié. Le même élève peut être photographié plusieurs semaines de suite. Calculer la probabilité qu'au bout de 4 semaines, aucun membre du club théatre n'ait été photographié.

Exercice 64 p 378

Comment tu dis ?
Un même individu peut être atteint de surdité unilatérale (portant sur une seule oreille) ou bilatérale (portant sur deux oreilles).
On admet que, dans une population donnée, les deux événements :

D : "être atteint de surdité à l'oreille droite" et

G : "être atteint de surdité à l'oreille gauche".

sont indépendants et tous deux de probabilité $0,05$, ce que l'on note $p(\mathrm{G}) = p(\mathrm{D}) = 0,05$.
On considère les événements suivants :

B : "être atteint de surdité bilatérale";

U : "être atteint de surdité unilatérale";

S : "être atteint de surdité (sur une oreille au moins)".

On donnera les valeurs numériques des probabilités demandées sous forme décimale approchée à 10^{-4} près.

1. (a) Calculer $p\,(\mathrm{D} \cap \mathrm{G})$ et en déduire $p\left(\mathrm{D} \cap \overline{\mathrm{G}}\right)$, $p\left(\overline{\mathrm{D}} \cap \mathrm{G}\right)$ et $p\left(\overline{\mathrm{D}} \cap \overline{\mathrm{G}}\right)$.
   (b) Verifier l'indépendance des événements D et $\overline{\mathrm{G}}$, $\overline{\mathrm{D}}$ et G, et $\overline{\mathrm{D}}$ et $\overline{\mathrm{G}}$.
   (c) Calculer $p(\mathrm{B})$, $p(\mathrm{S})$ et $p(\mathrm{U})$.
2. On suppose qu'un sujet pris au hasard dans la population considérée est atteint de surdité.
   Quelle est la probabilité :
   (a) qu'il soit atteint de surdité à droite ?
   (b) qu'il soit atteint de surdité bilatérale ?
3. Calculer $p\,(\mathrm{D} \cap \mathrm{U})$, puis $p\left(\mathrm{D} \cap \overline{\mathrm{U}}\right)$.
   En déduire $p_{\mathrm{U}}(\mathrm{D})$, ainsi que $p_{\overline{\mathrm{U}}}(\mathrm{D})$.
4. Calculer la probabilité que, sur 10 personnes de cette population prises au hasard, au moins l'une d'entre elles soit atteinte de surdité bilatérale.

Exercice 65 p 378

On désigne par n un entier naturel supérieur ou égal à 2.
On imagine n sacs de jetons S_1, S_2, ...S_n.
Au départ, le sac S_1 contient 2jetons noirs et un jeton blanc, et chacun des autres sacs contient 1 jeton noir et un jeton blanc.
On se propose d'étudier l'évolution des tirages successifs d'un jeton de ces sacs, effectués de la façon suivante :

- Première étape : on tire au hasard un jeton S_1.
- Deuxième étape : on place ce jeton dans S_2 et on tire, au hasard, un jeton de S_2.
- Troisième étape : après avoir placé dans S_3, le jeton sorti de S_2, on tire, au hasard, un jeton de S_3 ... et ainsi de suite ...

Pour tout entier naturel k tel que $1 \leqslant k \leqslant n$, on note E_k l'événement "le jeton sorti de S_k est blanc."

1. (a) Déterminer la probabilité de E_1 et les probabilités conditionnelles :
   $$p_{E_1}(E_2) \text{ et } p_{\overline{E_1}}(E_2).$$
   En déduire la probabilité de E_2.
   (b) Pour tout entier naturel k tel que $1 \leqslant k \leqslant n$, la probabilité de E_k est notée p_k.
   Justifier la relation de récurrence suivante : $p_{k+1} = \dfrac{1}{3}p_k + \dfrac{1}{3}$.
2. Etude d'une suite (u_k). On note (u_k) la suite définie par $u_1 = \dfrac{1}{3}$ et, pour tout entier $k \geqslant 1$: $u_{k+1} = \dfrac{1}{3}u_k + \dfrac{1}{3}$.
   (a) On considère la suite (v_k) définie , pour tout entier k de $\mathbb{N}^*$ par :
   $$v_k = u_k - \frac{1}{2}$$
   Démontrer que (v_k) est une suite géométrique.
   (b) En déduire l'expression de u_k en fonction de k. Montrer que la suite (u_k) est convergente et préciser sa limite.
3. Dans cette question, on suppose que $n = 10$.
   Déterminer pour quelles valeurs de k, on a :
   $$0,4999 \leqslant p_k \leqslant 0,5.$$