Programme de mathématiques pour la classe BCPST1

I – Objectifs de formation

La place des mathématiques dans la formation scientifique en BCPST

L'objectif de l'enseignement des mathématiques en BCPST est double.

D'une part il contribue à l'approfondissement de la culture scientifique générale en donnant aux étudiants un accès à quelques domaines fondamentaux (algèbre linéaire, analyse, probabilités). La pratique du raisonnement mathématique concourt ici comme ailleurs à la formation de l'esprit d'un futur scientifique ; la rigueur du raisonnement, l'esprit critique, le contrôle et l'analyse des hypothèses, le sens de l'observation et celui de la déduction trouvent en mathématiques un champ d'action où ils seront cultivés de manière spécifique.

D'autre part, il contribue à fournir des représentations et un langage dont les autres disciplines scientifiques étudiées dans ces classes et au-delà sont demandeuses ou utilisatrices. De là l'importance d'une cohérence et d'une coordination aussi bonnes que possible entre les diverses disciplines : il importe d'éviter les redondances tout en soulignant les points communs, de limiter les divergences ou ambigüités dues à la diversité des points de vue possibles sur un même objet tout en enrichissant l'enseignement par cette même diversité.

L'objectif n'est pas de former des professionnels des mathématiques, mais des personnes capables d'utiliser des outils mathématiques dans diverses situations, et éventuellement capables de dialoguer avec des mathématiciens dans le cadre de leur futur métier.

Les travaux dirigés sont le moment privilégié de la mise en œuvre, et de la prise en main par les élèves des techniques classiques et bien délimitées inscrites dans le corps du programme. Cette maitrise s'acquiert notamment grâce à des exercices variés. Le temps des travaux dirigés se prête également à l'expérimentation numérique, à la découverte et à la pratique des algorithmes, soit au moyen des calculatrices soit en lien avec l'enseignement d'informatique.

La coopération des enseignants d'une même classe ou d'une même discipline et, plus largement, celle de l'ensemble des enseignants d'un cursus donné, doit contribuer de façon efficace et cohérente à la qualité de ces interactions, notamment dans le cadre des travaux d'initiative personnelle encadrés (TIPE). Il importe aussi que le contenu culturel et historique des mathématiques ne soit pas sacrifié au profit de la seule technicité. En particulier, il pourra s'avérer pertinent d'analyser l'interaction entre un problème spécifique et la construction, pour le résoudre, d'outils conceptuels qui, pris ensuite par les mathématiciens comme objets d'étude, ont pu ultérieurement servir au traitement d'autres classes de problèmes.

© Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche, 2013
http://www.enseignementsup-recherche.gouv.fr

Le développement des compétences

L'enseignement des mathématiques en filière BCPST vise le développement de compétences utiles aux scientifiques, qu'ils soient ingénieurs, chercheurs ou enseignants, pour identifier les situations auxquelles ils sont confrontés, dégager les meilleures stratégies pour les résoudre, prendre avec un recul suffisant des décisions dans un contexte souvent complexe.

L'intégration des compétences à la formation des étudiants leur permet de gérer leurs apprentissages de manière responsable en repérant points forts et points faibles. Ces compétences prennent tout leur sens dans le cadre de la résolution de problèmes, de la modélisation ou formalisation jusqu'à la présentation des résultats en passant par la démarche de résolution proprement dite.

De manière spécifique, on peut distinguer les compétences suivantes :

S'engager dans une recherche et mettre en œuvre des stratégies	Il s'agit d'analyser un problème, de se poser des questions, d'expérimenter sur des exemples, de formuler des conjectures.
Modéliser	C'est traduire un phénomène en langage mathématique, élaborer des concepts et des outils lors d'une phase d'abstraction ou de conceptualisation.
Représenter	Il s'agit de choisir le registre (numérique, algébrique, géométrique) le mieux adapté pour traiter un problème ou représenter un objet mathématique, d'être capable de passer d'un registre à un autre, d'un mode de représentation (souvent visuelle : courbes, graphes, arborescences, tableaux) à un autre.
Raisonner et argumenter	Cela consiste à effectuer des inférences (inductives et déductives), à conduire une démonstration, à confirmer ou infirmer une conjecture, et enfin à évaluer la pertinence d'un concept au regard du problème posé.
Calculer, manipuler des symboles et maitriser le formalisme mathématique	C'est effectuer un calcul à la main ou à l'aide d'un instrument (calculatrice, logiciel), organiser les différentes étapes d'un calcul complexe, choisir des transformations et effectuer des simplifications, contrôler les résultats, mettre en œuvre des algorithmes, manipuler et exploiter des expressions symboliques, comprendre et utiliser le langage mathématique.
Communiquer à l'écrit et à l'oral	Il s'agit de comprendre les énoncés mathématiques écrits par d'autres, d'opérer la conversion entre le langage naturel et le langage symbolique formel, de rédiger une solution rigoureuse, de présenter et de défendre une production mathématique pour convaincre un interlocuteur ou un auditoire.

Mises en œuvre dans des situations et contextes spécifiques, les diverses compétences peuvent être déclinées en un certain nombre de capacités. À titre indicatif, à la fin de chaque chapitre est dressée une liste non exclusive de quelques capacités susceptibles d'être exercées en situation sur certaines des connaissances décrites dans ce chapitre, et permettant d'observer *in situ* la réalisation de certaines des six compétences.

© Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche, 2013

II – Programme de première année

1 – Préambule

Le programme de la filière BCPST se situe dans la continuité de la série S du lycée.

Les développements formels ou trop théoriques doivent être évités. Une place importante doit être faite aux applications, exercices, problèmes, en relation chaque fois que cela est possible avec les enseignements de physique, de chimie, de biologie, de sciences de la terre et d'informatique, en évitant les situations artificielles ainsi que les exercices de pure virtuosité technique.

Les résultats mentionnés dans le programme seront admis ou démontrés selon les choix didactiques faits par le professeur ; pour certains résultats, marqués comme « admis », la présentation d'une démonstration en classe est déconseillée.

Il est important de mettre en valeur l'interaction entre les différentes parties du programme, tant au niveau du cours que des thèmes des travaux proposés aux étudiants. À titre d'exemples, la géométrie apparait à la fois comme un terrain propice à l'introduction de l'algèbre linéaire, mais aussi comme un champ d'utilisation des concepts développés dans ce domaine du programme ; les probabilités permettent d'illustrer certains résultats d'analyse et justifient l'introduction du vocabulaire ensembliste.

C'est ainsi que le programme valorise les interprétations des concepts de l'analyse, de l'algèbre linéaire, de la géométrie et des probabilités en termes de paramètres modélisant l'état et l'évolution de systèmes biologiques, physiques ou chimiques. Ces interprétations, conjointement avec les interprétations géométriques, viennent en retour éclairer les concepts fondamentaux de l'analyse, de l'algèbre linéaire ou des probabilités. Elles sont parfois signalées dans le texte par le symbole $\leftrightharpoons$, mais ce repérage n'est pas exhaustif.

La présentation de l'**algèbre linéaire** est faite par le biais du calcul : systèmes d'équations linéaires, calcul matriciel. Seule la présentation de l'espace vectoriel K^n est demandée. L'espace vectoriel, comme objet général, n'est présenté qu'en seconde année. Ce choix a pour ambition de donner aux étudiants une connaissance et une habitude « pratique » du calcul multidimensionnel qui confère à l'introduction de la notion abstraite d'espace vectoriel un arrière-plan concret. En préparation de la seconde année, diverses situations permettent d'observer la structure d'espace vectoriel (fonctions, polynômes, suites) sans que la définition ait besoin d'être posée.

Dans la partie du programme consacrée à l'**analyse**, le but est de mettre en place les méthodes courantes de travail sur les suites et les fonctions. L'analyse est un outil pour les probabilités et pour les autres sciences et permet de développer la rigueur. On s'attache principalement à développer l'aspect opératoire, et donc à n'insister ni sur les questions les plus fines ou spécialisées ni sur les exemples « pathologiques ». On évite les situations conduisant à une trop grande technicité calculatoire.

La partie relative aux **probabilités** vise à consolider et à développer la formation des étudiants au raisonnement probabiliste, initiée dès la classe de Troisième et poursuivie jusqu'en classe Terminale. Une reprise de notions de statistique descriptive, réparties dans divers programmes allant des classes de Cinquième à la classe de Première, sert de base pour une étude élémentaire de la régression linéaire (ou ajustement affine), technique fréquemment utilisée dans les sciences expérimentales. Dans le domaine des probabilités, l'accent est mis sur le langage de la théorie des ensembles, les techniques élémentaires de dénombrement, et sur les espaces probabilisés finis. Tout ce qui concerne les variables aléatoires dont l'ensemble des valeurs est infini est traité en seconde année, de même que la statistique inférentielle. Les diverses notions seront illustrées par des exemples issus de la vie courante ou des diverses sciences.

En cohérence avec l'introduction d'un enseignement d'algorithmique au lycée, le programme encourage la **démarche algorithmique** et le recours à l'outil informatique (calculatrices, logiciels) ; le maniement de ces outils fait partie intégrante de la formation.

Le programme est organisé en deux grandes parties de volume sensiblement équivalent, conçues pour être traitées dans l'ordre au cours de deux semestres ; en revanche, au sein de chaque partie, aucun ordre particulier n'est imposé. L'ordre proposé dans le présent programme assure une bonne cohérence dans l'apparition des nouveaux concepts, mais il n'est pas le seul possible.

2 – Programme du premier semestre

Outils 1 – Vocabulaire de la logique et des ensembles

Les notions présentées ci-dessous, introduites dès la classe de Seconde, sont reprises comme outils pour l'algorithmique et les probabilités et doivent faire l'objet d'un développement très modeste sans abstraction excessive. Les exemples illustrant ces notions seront une première occasion d'introduire des situations probabilistes.

Ces notions ne pourront constituer le thème principal d'aucune question d'écrit ou d'oral.

Contenus	**Commentaires**
a) Logique élémentaire	
Assertion, négation, « et », « ou », implication, équivalence. Négation d'un « et » et d'un « ou ». Distributivité du « ou » sur le « et » et du « et » sur le « ou ».	Le principe de contraposition est rappelé.
b) Vocabulaire des ensembles	
Ensemble, élément, appartenance.	
Sous-ensemble (ou partie), inclusion. Réunion. Intersection. Complémentaire.	On se limite aux unions et intersections finies.
Complémentaire d'une union et d'une intersection, distributivité de $\cup$ sur $\cap$ et de $\cap$ sur $\cup$.	Le complémentaire d'une partie A est noté $\overline{A}$.
Couple, n-uplet. Produit cartésien.	Un élément de E^p sera appelé une p-liste d'éléments de E.
Quantificateurs universel et existentiel. Négation d'une assertion quantifiée.	Ces éléments, présentés dans les classes antérieures, sont repris afin de viser une expression mathématique précise. L'usage des quantificateurs hors des énoncés mathématiques est à proscrire.

Exemples de capacités : employer le langage de la théorie des ensembles pour communiquer avec précision ; traduire un énoncé en langue française en un énoncé symbolique ; maîtriser différentes formes de raisonnement.

Outils 2 – Nombres

L'objectif de ce chapitre est de consolider et de compléter les acquis des classes antérieures afin que ces outils soient familiers aux étudiants.

Les ensembles **N**, **Z**, **Q**, **R** et **C** sont supposés connus.

Contenus	**Commentaires**
a) Nombres entiers	
Raisonnement par récurrence.	Lorsqu'un raisonnement par récurrence nécessite une hypothèse dite « forte », la formulation de cette hypothèse devra être proposée.
b) Nombres réels	
Intervalles.	On se limite à une simple description des différents types d'intervalles.
Valeur absolue.	Interprétation de la valeur absolue en termes de distance.
Partie entière.	On adopte la notation internationale $\lfloor \cdot \rfloor$ pour la partie entière afin de ne pas la confondre avec l'espérance.
Exposants, racine carrée.	On se limite, à ce stade, aux puissances du type x^n, $x \in \mathbf{R}^*$, $n \in \mathbf{Z}$. On attend une maitrise des formules $(xy)^n = x^n y^n$, $x^{n+m} = x^n x^m$, $(x^n)^m = x^{nm}$, $\sqrt{x^2} = \lvert x \rvert$, $\sqrt{xy} = \sqrt{x}\sqrt{y}$.
Identités remarquables.	Les attendus se limitent aux formules suivantes (dans **R** ou **C**) : $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$ $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$
Manipulation des inégalités.	Il s'agit d'une simple reprise des règles de calcul algébrique sur les inégalités.
Résolutions d'équations et d'inéquations simples.	Il s'agit d'une reprise des types d'équations et inéquations abordées dans les classes antérieures.
Majorant, minorant, plus grand, plus petit élément d'une partie non vide de **R**. Borne supérieure, borne inférieure.	On admet l'existence de la borne supérieure d'une partie majorée non vide.
c) Nombres complexes	
Écriture algébrique d'un nombre complexe. Parties réelle et imaginaire. Propriétés élémentaires de Re et Im.	
Représentation géométrique d'un nombre complexe. Affixe d'un point, d'un vecteur. Interprétation géométrique de la somme de deux complexes.	L'utilisation des nombres complexes pour résoudre des problèmes de géométrie n'est pas un objectif du programme.
Conjugué d'un nombre complexe. Interprétation géométrique. Propriétés de la conjugaison.	On fait ressortir l'efficacité du formalisme de la conjugaison (par exemple pour montrer qu'un nombre complexe est réel ou imaginaire pur).
Module d'un nombre complexe. Interprétation géométrique.	Suivant les contextes, on choisit la formulation adéquate : $\lvert z \rvert = \sqrt{z\bar{z}}$ ou $\lvert a + \mathrm{i}b \rvert = \sqrt{a^2 + b^2}$.
Propriétés du module : multiplicativité, inégalité triangulaire. Notation $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$. Propriétés $\lvert \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \rvert = 1$, $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha+\beta)} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} \times \mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}$, $\overline{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$, $(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})^n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}$, formules d'Euler.	
Arguments d'un nombre complexe non nul. Écriture exponentielle d'un nombre complexe non nul.	On met en évidence quelques choix usuels d'intervalles permettant de définir l'argument.

© Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche, 2013
http://www.enseignementsup-recherche.gouv.fr

Contenus (suite)	**Commentaires**
Résolution des équations du second degré à coefficients réels. Somme et produit des racines. Définition de e^z pour $z \in \mathbf{C}$. Formule $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \times e^{z_2}$.	L'équation du second degré à coefficients complexes, les racines n-èmes de l'unité ou d'un nombre complexe quelconque ne sont pas des attendus du programme.

Exemples de capacités : démontrer par récurrence ; manipuler des égalités et des inégalités ; calculer sur des nombres réels et complexes.

Outils 3 – Trigonométrie

Le but de ce chapitre est surtout la maitrise des calculs trigonométriques en employant les formules signalées. Les fonctions trigonométriques elles-mêmes seront vues plus loin.

Contenus	**Commentaires**
Définition de $\cos(\theta)$, $\sin(\theta)$ et $\tan(\theta)$.	
Périodicité et symétries.	On fait le lien avec les symétries agissant sur le cercle trigonométrique.
Formules de trigonométrie.	Formules découlant des symétries de cos, sin et tan. $\cos^2(\theta)+\sin^2(\theta)=1$ $\cos(\alpha\pm\beta)=\cos(\alpha)\cos(\beta)\mp\sin(\alpha)\sin(\beta)$ $\sin(\alpha\pm b)=\sin(\alpha)\cos(\beta)\pm\cos(\alpha)\sin(\beta)$ $\cos(2\theta)=\cos^2(\theta)-\sin^2(\theta)$ $\quad=2\cos^2(\theta)-1=1-2\sin^2(\theta)$ $\sin(2\theta)=2\sin(\theta)\cos(\theta)$ Les autres formules de trigonométrie ne sont pas des attendus du programme.
Résolution d'équations trigonométriques simples : $\cos(x)=c$, $\sin(x)=s$ et $\tan(x)=t$. Notations arcccos, arcsin, arctan.	On introduit les notations arccos, arcsin et arctan en donnant les définitions correspondantes en termes de solutions d'équations dans certains intervalles et en admettant l'existence et l'unicité de ces solutions.
Transformation de $a\cos(\theta)+b\sin(\theta)$ en $r\cos(\theta+\varphi)$. Résolution de $a\cos(\varphi)+b\sin(\varphi)=c$.	La méthode n'est pas imposée. $\leftrightarrows$ On fait le lien avec diverses situations rencontrées en sciences physiques.
Linéarisation de $\cos^p(\theta)\sin^q(\theta)$.	On se limite à de petites valeurs de p et q.

Exemple de capacité : employer des formules pour résoudre des équations ou des problèmes faisant intervenir la trigonométrie.

Outils 4 – Méthodes de calcul

L'objectif de ce chapitre est de mettre en place quelques principes et exemples de maniement des symboles Σ et Π, dont les usages sont constants. La présentation des coefficients binomiaux peut être faite dans ce contexte ou bien en lien avec le dénombrement.

On travaille dans **R** ou dans **C**.

Contenus	**Commentaires**
Notation $\sum$.	On précise qu'une somme ayant un ensemble d'indices vide est nulle.
Règles de calcul sur le symbole $\sum$.	Linéarité, changements d'indices (translations et symétries), télescopages.
Sommes doubles : $\displaystyle\sum_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq m}} a_{i,j}$ et $\displaystyle\sum_{1\leq i\leq j\leq n} a_{i,j}$.	Les attendus du programme se limitent au maniement de ces symboles conduisant à les mettre sous la forme de deux sommes simples successives.
Notation $\prod$.	On précise qu'un produit ayant un ensemble d'indices vide vaut 1.
Règles de calcul sur le symbole $\prod$.	On se contente de mettre en valeur la multiplicativité du symbole $\prod$.
Factorielle, notation $n!$.	
Somme de termes consécutifs d'une progression géométrique : $\displaystyle\sum_{0\leq k\leq n} q^k = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$.	La raison q est dans $\mathbf{C}\setminus\{1\}$.
Sommes des n premiers entiers et des n premiers carrés.	
Coefficients binomiaux.	On adopte la définition suivante : $\displaystyle\binom{n}{k} = \begin{cases} 0 & \text{si } k<0 \text{ ou } k>n \\ \dfrac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!} & \text{sinon.} \end{cases}$
Triangle de Pascal. Formule du binôme.	On met en valeur les formules : $\displaystyle\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ $\displaystyle\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$ $\displaystyle\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$

Exemples de capacités : calculer efficacement avec des symboles de sommes et produits ; transformer des expressions contenant des coefficients binomiaux.

Outils 5 – Vocabulaire des applications

On évite ici tout excès de formalisme et on illustre les notions présentées par des exemples issus de fonctions de **R** dans **R**.

Ces notions ne pourront constituer le thème principal d'aucune question d'écrit ou d'oral.

Contenus	**Commentaires**
Application d'un ensemble de départ dans un ensemble d'arrivée.	On introduit l'exemple des fonctions indicatrices.
Image directe d'une partie de l'ensemble de départ.	La notion d'image réciproque d'une partie de l'ensemble d'arrivée n'est pas un attendu du programme.

Contenus (suite)	Commentaires
Composition.	On étudie quelques exemples fournis par des fonctions de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ que l'on compose de diverses manières.
Injection, surjection, bijection, application réciproque. Composée de deux bijections, réciproque de la composée.	On fait remarquer que, dans le cadre des fonctions de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, une bijection et sa réciproque ont des graphes symétriques l'un de l'autre par rapport à la première bissectrice.

Exemple de capacité : démontrer qu'une application est injective ou surjective.

Outils 6 – Dénombrement

Le but de ce chapitre est de mettre en place un vocabulaire efficace pour décrire (ou modéliser) et analyser les problèmes combinatoires, ainsi que quelques résultats fondamentaux associés. Les résultats de ce chapitre seront justifiés intuitivement, sans recours à des démonstrations formelles. De façon générale, on évitera tout excès de technicité dans les dénombrements.

Tous les ensembles considérés dans ce chapitre sont finis.
Dans les définitions qui suivent, on suppose que $\mathrm{card}(E) = n$.

Contenus	Commentaires
Cardinal, notation $\mathrm{card}(E)$. Deux ensembles finis E et F ont le même cardinal si, et seulement si, il existe une bijection entre E et F. Cardinal d'une union disjointe. Formule $\mathrm{card}(A \cup B) = \mathrm{card}A + \mathrm{card}B - \mathrm{card}(A \cap B)$. Cardinal d'un produit cartésien.	On définit le cardinal grâce à la notion intuitive de nombre d'éléments.
Un éléments de E^p est appelée une p-liste de E. Il y a n^p p-listes de E.	C'est le nombre de façons de choisir successivement p objets parmi n, avec d'éventuelles répétitions.
Une p-liste est dite sans répétition lorsque ses éléments sont distincts deux à deux. Il y a $n(n-1)\cdots(n-p+1)$ p-listes sans répétition de E.	C'est le nombre de façons de choisir successivement p objets parmi n, sans répétition.
Une liste de E contenant exactement une fois chaque élément de E est appelée une permutation de E. Il y a $n!$ permutations de E.	C'est le nombre de façons de choisir successivement tous les objets d'un ensemble, sans répétition.
Si $p \leq n$, une p-combinaison de E est une partie de E à p éléments. Il y a $\binom{n}{p}$ p-combinaisons de E. Cardinal de l'ensemble des parties de E.	C'est le nombre de façons de choisir simultanément p objets parmi n. On peut sur cette base réinterpréter la formule du binôme.

Exemples de capacités : modéliser une situation combinatoire au moyen d'un vocabulaire précis ; mener un calcul de dénombrement.

© Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche, 2013
http://www.enseignementsup-recherche.gouv.fr

Analyse 1 – Suites usuelles

Le but de ce chapitre est d'étendre un peu l'ensemble des suites « connues » et de développer les aptitudes au calcul sur ces suites ; le point de vue est ici algébrique.

On ne travaille ici qu'avec des suites réelles.

Contenus	Commentaires
Somme, produit, quotient de suites réelles.	
Suites arithmétiques, suites géométriques.	
Suites arithmético-géométriques. Suites vérifiant une relation du type $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$.	Pour ces deux situations, l'attendu se limite à la maitrise d'une méthode de calcul du $n^{\text{ème}}$ terme. ⇋ On pourra illustrer ces différents types de suites avec des modèles discrets de populations.

Exemple de capacité : obtenir une expression pour le terme d'ordre n d'une suite arithmétique, géométrique ou arithmético-géométrique.

Analyse 2 – Fonctions usuelles

Le but de ce chapitre est de consolider et d'enrichir modérément le registre des fonctions usuelles. Pour chaque fonction, la maitrise attendue concerne la définition, les principales propriétés, la formule de dérivation (avec son domaine de validité) et la courbe représentative.

Contenus	Commentaires
Parité, périodicité. Fonctions majorées, minorées, bornées. Monotonie. Opérations algébriques.	On se contente de donner ou de rappeler les définitions dans le cadre des fonctions réelles de la variable réelle.
Fonctions puissances d'exposant entier (dans $\mathbf{Z}$), polynômes. Fonction racine carrée. Fonctions exponentielle et logarithme néperien (ln).	⇋ Pour ces diverses fonctions, les courbes représentatives sont mises en valeur comme des outils fondamentaux pour la modélisation, la reconnaissance des formes graphiques etc.
Notation a^b.	On généralise les propriétés évoquées dans Outils 2.
Fonctions exponentielles : $x \mapsto a^x$ avec $a \in \mathbf{R}_+^*$.	
Fonction logarithme décimal (log).	Les logarithmes dans une base différente de e et 10 sont hors-programme. Les fonctions hyperboliques sont hors-programme.
Fonctions puissances : $x \mapsto x^\alpha$ avec $\alpha \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}$	$x \mapsto x^\alpha$ est définie sur $\mathbf{R}_+^*$.
Fonctions circulaires : sin, cos et tan.	Formule $\tan' = 1 + \tan^2 = \dfrac{1}{\cos^2}$.
Fonctions partie entière $\lfloor\cdot\rfloor$ et valeur absolue $\lvert\cdot\rvert$.	

Exemples de capacités : employer les fonctions usuelles ; reconnaitre, distinguer et employer les graphes des fonctions usuelles.

© Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche, 2013

Analyse 3 – Dérivées et primitives

Le but de ce chapitre est de consolider et de compléter la maitrise des règles de dérivation et de quelques techniques de primitivation, en vue des applications physiques et aux équations différentielles.

Contenus	Commentaires
a) Dérivées	
Calculs des dérivées : sommes, produits, quotients.	Révision des règles correspondantes. Les dérivées des fonctions usuelles doivent être connues.
Dérivation d'une fonction composée.	On insiste sur le fait qu'une composée de fonctions dérivables est dérivable.
Dérivées partielles d'une fonction de deux variables.	On introduit les notations $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$. ⇋ Le calcul des dérivées partielles est présenté en lien avec l'usage qui en est fait en physique.
b) Primitives	
Primitives usuelles et calculs simples de primitives.	Révision de ce qui a été présenté en classe terminale (notamment : primitives de $u'e^u$, $u'u^n$, u'/u, $u'/\sqrt{u}$, $u'\sin u$, $u'\cos u$).
Primitivation par parties.	On met en valeur $x \mapsto x\ln(x) - x$ comme primitive de ln.

Exemples de capacités : dériver une expression par rapport à une variable figurant dans cette expression ; calculer une primitive simple.

Analyse 4 – Équations différentielles linéaires à coefficients constants

L'objectif de ce chapitre est de mettre en place assez tôt la problématique des équations différentielles, en vue des usages qui en sont faits en physique, chimie, biologie.

Contenus	Commentaires
Résolution de $y' + ay = b$ où a et b sont des constantes réelles.	⇋ On peut montrer des exemples tirés de la cinétique chimique.
Résolution de $y'' + ay' + by = c$ où a, b et c sont des constantes réelles.	⇋ On traite en exemple l'équation de l'oscillateur harmonique $y'' + \omega^2 y = 0$; les solutions sont présentées sous diverses formes.
Principe de superposition.	⇋ Il s'agit de mettre en évidence la linéarité des « sorties » (la fonction y) par rapport aux « entrées » (ici, la constante c).

Algèbre linéaire 1 – Systèmes linéaires

Le premier contact avec l'algèbre linéaire est de nature algorithmique. Il est envisageable de programmer l'algorithme du pivot à condition de rester dans un cas très simple.

On travaille dans $K = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.

Contenus	Commentaires
Systèmes d'équations linéaires.	

© Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche, 2013
http://www.enseignementsup-recherche.gouv.fr

Contenus (suite)	Commentaires
Systèmes linéaires équivalents. Opérations élémentaires.	Les opérations élémentaires sont : multiplier une équation par un scalaire non nul, ajouter à une équation une combinaison linéaire des autres.
Réduction d'un système linéaire par la méthode du pivot de Gauss.	On se limite à la mise en pratique de la méthode ; l'écriture formelle d'un algorithme de réduction n'est pas un attendu du programme.
Rang d'un système : c'est son nombre de pivots après réduction.	On admet que ce nombre est indépendant du choix des pivots.
Résolution : un système linéaire a zéro, une seule ou une infinité de solutions. Dans ce dernier cas, on exprime toutes les inconnues en fonction de certaines d'entre elles.	On fait le lien avec les problèmes d'intersection de droites et de plans (dans le plan ou dans l'espace).

Exemples de capacités : mettre en place une recherche de pivots sur un système linéaire ; mener une démarche de résolution d'un système linéaire ; discuter de l'existence des solutions d'un système linéaire.

Algèbre linéaire 2 – Matrices

Le but de ce chapitre est de mettre en place le calcul sur les matrices avec ses analogies et différences vis-à-vis du calcul sur les nombres réels et complexes. La mise en pratique de ce calcul peut nécessiter l'usage de moyens spécifiques (calculatrice, ordinateur).

On travaille dans $K = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.

Contenus	Commentaires
Matrices : définition, vocabulaire. Matrice nulle. Matrices carrées, matrices lignes, colonnes. Matrices triangulaires, diagonales. Matrice identité.	
Opérations sur les matrices : somme, produit par un scalaire, produit matriciel.	Produit de matrices diagonales.
Propriétés de ces opérations.	On peut remarquer que la formule du binôme est applicable dans le cas de matrices qui commutent.
Transposée d'une matrice. Transposée d'une somme, d'un produit de matrices. Matrices carrées symétriques.	
Écriture matricielle d'un système linéaire. Rang d'une matrice.	On adapte la méthode du pivot qui devient un algorithme opérant sur les lignes ou les colonnes d'une matrice. Le rang d'une matrice est alors défini comme le nombre de pivots. On admet que le rang d'une matrice et de sa transposée sont les mêmes.
Matrices carrées inversibles, matrice inverse, inverse d'un produit, inverse de la transposée d'une matrice carrée inversible. Recherche pratique de l'inverse d'une matrice.	L'inversion peut se ramener à la résolution de systèmes linéaires. La description d'un algorithme d'inversion de matrices n'est pas un attendu du programme.

Contenus (suite)	Commentaires
Inversibilité d'une matrice carrée 2×2 et expression de la matrice inverse lorsqu'elle existe. Application à l'expression de la solution d'un système linéaire $\begin{cases} ax+by=e \\ cx+dy=f \end{cases}$ lorsque $ad-bc\neq 0$.	On introduit la notation $\det A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ sans aucun développement théorique. Le déterminant des matrices de taille supérieure à 2 est hors-programme.

Exemples de capacités : traduire un problème linéaire sous forme matricielle ; mener un calcul faisant intervenir des matrices ; utiliser le rang pour décider de l'existence de solutions d'un problème linéaire ; calculer une matrice inverse dans un cas simple.

Géométrie 1

Ce chapitre sert de support intuitif et de terrain d'application à l'algèbre linéaire, mais aussi en vue d'applications aux sciences physiques et à la géologie.

Au cours d'une épreuve de mathématiques, la géométrie ne pourra servir que comme outil d'application pour l'algèbre linéaire.

On se place dans le plan et l'espace géométriques usuels munis d'un repère orthonormal.

Contenus	Commentaires
a) Produit scalaire dans le plan ou dans l'espace	Ce paragraphe vise une consolidation des acquis.
Vecteurs du plan et de l'espace, colinéarité.	Par représentation sous forme de couples ou de triplets de coordonnées, les vecteurs apparaissent comme éléments de $\mathbf{R}^2$ ou $\mathbf{R}^3$.
Déterminant de deux vecteurs dans le plan, condition de colinéarité.	On fait le lien avec le déterminant d'une matrice carrée 2×2.
Produit scalaire de deux vecteurs du plan ou de l'espace.	Le produit scalaire est calculé à partir des coordonnées et relié à la norme.
Orthogonalité. Interprétation du produit scalaire en termes de projection orthogonale.	On rappelle la définition de la projection orthogonale d'un vecteur sur une droite ou sur un plan.
b) Droites et cercles dans le plan Vecteur directeur d'une droite. Représentation paramétrique d'une droite. Vecteur normal à une droite. Équation cartésienne d'une droite obtenue à l'aide d'un vecteur normal. Coefficient directeur (ou pente) d'une droite. Équation d'un cercle défini par son centre et son rayon.	
c) Droites et plans dans l'espace Vecteur directeur d'une droite. Représentation paramétrique d'une droite. Base d'un plan. Représentation paramétrique d'un plan. Vecteur normal à un plan. Équation cartésienne d'un plan obtenue à l'aide d'un vecteur normal.	Les sphères ne sont pas un attendu du programme.
d) Barycentres	

Contenus (suite)	Commentaires
Définition du barycentre de n points du plan ou de l'espace affectés de coefficients. Coordonnées du barycentre.	⇋ La notion de barycentre est principalement introduite pour éclairer diverses notions comme centre de masse (ou d'inertie) en mécanique, le centre de pression en hydrostatique et le point moyen en statistique descriptive.

Exemples de capacités : modéliser un problème de nature géométrique au moyen d'équations ; représenter une configuration.

Algèbre – Polynômes

Les polynômes sont introduits à la fois comme outils de modélisation de phénomènes complexes et comme un domaine permettant un calcul de nature algébrique.
Les applications polynomiales sont plus simplement appelées polynômes. Les notions de polynôme en tant qu'objet formel et de fraction rationnelle sont hors-programme.

Contenus	Commentaires
Monômes, degré. Polynômes à coefficients réels ou complexes.	On fait apparaitre les polynômes comme sommes de monômes.
Opérations sur les polynômes (somme, produit).	On constate que ces opérations (sur les fonctions) fournissent des polynômes.
Une combinaison linéaire de monômes de degrés distincts ne peut être nulle que si tous les coefficients sont nuls.	
Degré.	On convient que le polynôme nul est de degré $-\infty$.
Coefficients d'un polynôme.	On montre que deux polynômes sont égaux si, et seulement si, ils ont les mêmes coefficients.
Polynôme dérivé.	Pour les polynômes à coefficients complexes, le polynôme dérivé est défini à partir des coefficients.
Degré d'une somme, d'un produit, d'une dérivée de polynômes.	
Racines d'un polynôme.	Les racines des polynômes du second degré à coefficients réels ont été étudiées dans Outils 2.
Un polynôme P est factorisable par $X-\alpha$ si, et seulement si, α est une racine de P.	La division euclidienne est hors-programme.
Généralisation à plusieurs racines distinctes.	Le nombre de racines distinctes ne dépasse pas le degré.
Un polynôme P est factorisable par $(X-\alpha)^k$ si, et seulement si, on a $P^{(j)}(\alpha)=0$ pour $j \in \{0,1,\ldots,k-1\}$.	On met en évidence, à partir d'exemples, les notions de racine simple, racine multiple, racine double.
Ordre de multiplicité d'une racine.	La formule de Taylor est hors-programme.
Théorème de d'Alembert–Gauss :	
• Tout polynôme à coefficients complexes de degré n peut s'écrire $a_n(X-x_1)\cdots(X-x_n)$, les x_i n'étant pas nécessairement deux à deux distincts.	Ce résultat est admis. La décomposition sur **R** est hors-programme.
• Tout polynôme de degré $n \in \mathbf{N}$ admet exactement n racines complexes comptées avec leurs ordres de multiplicité.	Ce résultat est admis.

Contenus (suite)	Commentaires
Un polynôme de degré inférieur ou égal à n ayant au moins $(n+1)$ racines, comptées avec leurs ordres de multiplicité, est nul.	En particulier, tout polynôme ayant une infinité de racines est nul.

Exemples de capacités : calculer sur des polynômes ; factoriser un polynôme.

Statistique 1 – Statistique descriptive

La plupart des notions étudiées dans ce chapitre ont été présentées dans les classes antérieures. Il s'agit d'abord de préciser le vocabulaire et de rappeler quelques techniques élémentaires de description statistique.
⇋ Un choix d'exemples, inspirés de situations rencontrées en biologie, géologie, physique ou chimie, permettra de montrer l'intérêt et les limites des résumés statistiques introduits, avant de pouvoir aborder la question du lien éventuel entre deux caractères d'une même population.

Contenus	Commentaires
a) Statistique univariée	
Série statistique de taille n portant sur un caractère x. Distinction entre caractères quantitatifs et qualitatifs.	Un caractère est encore appelé variable ou variable statistique. L'observation se traduit par un n-uplet : $(x_1, x_2, \dots, x_n)$.
Description d'une série statistique : effectifs, fréquences, fréquences cumulées.	
Représentations graphiques.	Diagrammes en bâtons, histogrammes.
Caractéristiques de position (moyenne $\overline{x}$, médiane, mode).	⇋ On montre, sur des exemples tirés de données réelles, que ces caractéristiques peuvent donner des indications plus ou moins pertinentes.
Caractéristiques de dispersion (variance s_x^2 et écart-type s_x, quartiles, déciles).	
b) Statistique bivariée	
Série statistique double de taille n portant sur deux caractères quantitatifs x et y. Nuage de points de $\mathbf{R}^2$ associé.	L'observation se traduit par un n-uplet d'éléments de $\mathbf{R}^2$: $((x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n))$
Point moyen $(\overline{x}, \overline{y})$ du nuage.	
Caractéristiques d'une série statistique double : covariance s_{xy}, coefficient de corrélation r_{xy}.	
Ajustement affine selon la méthode des moindres carrés.	L'optimalité de l'ajustement est, à ce stade, admise.
Interprétation géométrique de l'ajustement affine.	⇋ L'objectif est de mettre en place une méthode largement répandue dans les autres enseignements scientifiques. On présente sur des exemples comment des changements de variables peuvent transformer le nuage de sorte que la droite des moindres carrés soit plus pertinente.

Exemples de capacités : décrire une situation statistique au moyen d'indicateurs statistiques ; mettre en place un ajustement affine (ou régression linéaire).

Analyse 5 – Suites réelles

Contenus	Commentaires
Suites majorées, minorées, bornées. Suites monotones.	
Convergence, divergence. Limite infinie.	La définition d'une limite par (ε, n_0) est présentée, mais aucune technicité ne pourra être exigée en la matière.
Comparaison de la convergence et de la limite d'une suite (u_n) avec celles des deux suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}).	Utilisation de cette comparaison pour justifier une divergence. La notion générale de suite extraite est hors programme.
Opérations sur les limites.	
Résultats fondamentaux sur les limites et inégalités : • Signe d'une suite de limite non nulle. • Passage à la limite dans une inégalité large. • Théorème dit « des gendarmes » et extension aux limites infinies.	
Théorème de la limite monotone.	Toute suite réelle monotone admet une limite finie ou infinie.
Suites adjacentes et théorème des suites adjacentes.	
Exemples d'étude de suites du type $u_{n+1} = f(u_n)$.	L'étude numérique (par itération) et graphique sont présentées comme outils d'étude et de formation de conjectures. L'objectif est alors l'étude de la monotonie et de la convergence de telles suites dans les cas simples de fonctions f monotones. Aucun théorème général relatif à ce type de suites n'est exigible des étudiants.
Croissances comparées entre les suites factorielle, puissance (n^α avec $\alpha > 0$), géométriques (a^n avec $a > 1$).	
Suites équivalentes, notation $u_n \sim v_n$. L'équivalence est compatible avec la multiplication, la division et l'élévation à une puissance constante. Utilisation des équivalents pour la recherche de limites.	Le développement sur les équivalents doit être modeste et se limiter aux suites dont le terme général ne s'annule pas à partir d'un certain rang.

Exemples de capacités : démontrer ou réfuter une convergence de suite ; comparer deux suites asymptotiquement.

3 – Programme du second semestre

Probabilités 1 – Concepts de base des probabilités

Le but de ce chapitre est de reprendre de manière systématique les bases des probabilités finies telles qu'introduites en classes de Seconde et Première et de les compléter avec l'étude du conditionnement abordé en classe Terminale.
⇋ Ce domaine peut être avantageusement illustré avec une diversité de situations tirées de la génétique.

© Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche, 2013

Contenus	Commentaires
a) Vocabulaire des expériences aléatoires et probabilités	
Ensemble des résultats possibles de l'épreuve (univers). Évènements. Évènement certain, évènement impossible. Évènements incompatibles	On se limite au cas où l'algèbre des évènements est l'ensemble des parties de Ω.
Système complet d'évènements.	Un système complet pour Ω est une famille finie de parties deux à deux disjointes dont la réunion est l'ensemble Ω.
Probabilité.	
Propriétés d'une probabilité : $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$, $P(\varnothing) = 0$, $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B})$, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.	La formule du crible est hors-programme.
Si $\Omega = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ et $p_1, p_2, \ldots, p_n$ sont des réels positifs ou nuls de somme 1, il existe une et une seule probabilité P sur Ω telle que $P(\{x_i\}) = p_i$ pour tout i.	Choisir les valeurs des p_i revient à choisir un modèle probabiliste.
Cas de l'équiprobabilité : probabilité uniforme.	
b) Étude du conditionnement	
Définition de la probabilité conditionnelle.	On utilise l'une ou l'autre des deux notations $P(B\,\vert\,A)$ et $P_A(B)$ pour la « probabilité de B sachant A » (probabilité de B sachant que A est réalisé).
P_A est une probabilité.	
Formule de conditionnement $P(A \cap B) = P(A)P(B\,\vert\,A)$.	
Formule des probabilités composées (conditionnements successifs).	
Formule des probabilités totales $P(B) = \sum_i P(B \cap A_i)$.	Dans le cas où les $P(A_i)$ sont non nuls, interprétation en termes de probabilités conditionnelles. On utilise des représentations telles que arbres, tableaux, diagrammes, etc.
Formule de Bayes.	
Indépendance de deux évènements, de deux épreuves. Évènements (mutuellement) indépendants, épreuves (mutuellement) indépendantes.	On souligne le lien qui existe entre les hypothèses d'indépendance et les choix faits lors de la modélisation du problème étudié. La notion générale de probabilité produit n'est pas un attendu du programme.

Exemples de capacités : modéliser une expérience aléatoire au moyen d'une probabilité ; calculer la probabilité d'un évènement ; élaborer une hypothèse d'indépendance et l'utiliser pour calculer des probabilités.

Analyse 6 – Limites, continuité

Contenus	Commentaires
a) Limites	
Limite d'une fonction en un point. Limite à droite, limite à gauche. Limite en $+\infty$ ou $-\infty$.	La définition d'une limite par (ε, α) est présentée, mais les détails techniques ne sont pas un attendu du programme.
Si (u_n) tend vers a et si la limite de f en a est b, alors la suite $(f(u_n))$ tend vers b.	

© Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche, 2013
http://www.enseignementsup-recherche.gouv.fr

Contenus (suite)	**Commentaires**
Opérations sur les limites. Limite de fonctions composées. Résultats fondamentaux sur les limites et inégalités : • Signe d'une fonction de limite non nulle. • Passage à la limite dans une inégalité large. • Théorème dit « des gendarmes » et extension aux limites infinies.	
Théorème de la limite monotone.	Une fonction monotone sur un intervalle ouvert admet une limite finie ou infinie aux bornes de l'intervalle.
b) Comparaison de fonctions	
Croissances comparées des fonctions exponentielles, puissances et logarithmes.	
Fonctions équivalentes, notation $f \sim g$. L'équivalence est compatible avec la multiplication, la division et l'élévation à une puissance constante. Utilisation des équivalents pour la recherche de limites.	Le développement reste modeste et se limite aux fonctions qui ne s'annulent pas au voisinage du point de référence.
c) Continuité	
Continuité en un point. Continuité à droite et à gauche. Opérations, composition. Prolongement par continuité. Continuité sur un intervalle.	
Toute fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes.	Ce résultat est admis.
Théorème des valeurs intermédiaires.	On peut présenter une idée de la démonstration en s'appuyant sur un principe de dichotomie.
d) Bijections continues	
Théorème de la bijection : une fonction f continue et strictement monotone sur un intervalle I réalise une bijection de I sur l'ensemble $f(I)$, qui est un intervalle, et sa réciproque est continue et strictement monotone sur $f(I)$.	On peut illustrer l'algorithme de dichotomie sur des exemples d'équations de type $f(x)=0$.
Définition, monotonie et représentation graphique des fonctions $\sqrt[n]{\ }$.	La fonction $\sqrt[n]{\ }$ est définie et continue sur $\mathbf{R}$ (respectivement sur $\mathbf{R}_+$) lorsque n est impair (respectivement n est pair).
Définition, monotonie et représentation graphique de la fonction arctan.	Aucune formule n'est à connaitre excepté l'imparité de la fonction arctan.

Exemples de capacités : calculer une limite de fonction ; comparer deux fonctions asymptotiquement ; résoudre de manière approchée une équation de type $f(x)=0$.

Analyse 7 – Dérivation

Contenus	**Commentaires**
a) Dérivée	
Dérivée en un point. Dérivée à gauche, dérivée à droite. Fonction dérivée. Notations f' et $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$.	
Interprétation graphique, équation de la tangente à une courbe d'équation $y=f(x)$.	Révisions des acquis des classes antérieures.

© Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche, 2013

Contenus (suite)	Commentaires
Opérations sur les dérivées : linéarité, produit, quotient, fonction composée. Dérivation d'une fonction réciproque.	Dérivée de la fonction arctan. Dérivée de la fonction $\sqrt[n]{\ }$ (sur $\mathbf{R}^*$ lorsque n est impair et sur $\mathbf{R}_+^*$ lorsque n est pair).
b) Théorème de Rolle et conséquences Théorème de Rolle. Formule des accroissements finis. Caractérisation des fonctions croissantes (au sens large) par la positivité de leur dérivée. Cas des fonctions constantes. Cas des fonctions strictement croissantes. Recherche d'extrémums.	L'inégalité des accroissements finis peut être mentionnée mais n'est pas un attendu du programme. On se contente du résultat suivant : si la dérivée est positive ou nulle sur un intervalle et ne s'annule qu'en un nombre fini de points alors la fonction est strictement croissante sur cet intervalle. Le théorème sur la limite de la dérivée est hors-programme.
c) Dérivées d'ordre supérieur Fonctions de classe $\mathcal{C}^n$, de classe $\mathcal{C}^\infty$. Le produit de deux fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ est de classe $\mathcal{C}^n$, la composée de deux fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ de même.	La formule de Taylor-Lagrange est hors-programme. La formule de Leibniz est hors programme.

Exemple de capacité : étudier les variations d'une fonction de variable réelle et à valeurs réelles.

Analyse 8 – Développements limités et études de fonctions

Contenus	Commentaires
a) Développements limités Définition de la notation $o(x^n)$ pour désigner des fonctions négligeables devant la fonction $x \mapsto x^n$ pour $n \in \mathbf{Z}$, au voisinage de 0 ou de l'infini.	On se ramène, aussi souvent que nécessaire, à la limite d'un quotient.
Définition des développements limités en 0. Unicité des coefficients d'un développement limité.	Les problèmes de développement limité en un réel non nul ou en $\pm\infty$ sont ramenés en 0.
Opérations sur les développements limités : somme, produit.	L'obtention d'un développement limité pour une fonction composée est présentée et exercée sur des exemples simples.
Primitivation d'un développement limité.	
Formule de Taylor-Young : existence d'un développement limité à l'ordre n pour une fonction de classe $\mathcal{C}^n$.	La formule de Taylor-Young peut être admise.
Développements limités usuels au voisinage de 0 : exp, cos, sin, $x \mapsto 1/(1+x)$, $x \mapsto \ln(1+x)$, $x \mapsto (1+x)^\alpha$.	Les exercices de calcul de développements limités ont pour objet de faciliter l'assimilation des propriétés fondamentales, et ne doivent pas être orientés vers la virtuosité calculatoire.

© Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche, 2013

Contenus (suite)	Commentaires
Exemples d'approximations numériques des fonctions dérivées : pour une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ au voisinage de x, approximation de $f'(x)$ par $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$; pour une fonction de classe $\mathcal{C}^3$, par $\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}$.	⇋ La formule de Taylor-Young (à l'ordre 2 ou 3) montre l'intérêt de ces approximations, introduites en vue de l'usage dans les autres enseignements. En mathématiques, le développement reste modeste et, en particulier, on ne cherchera pas à majorer l'erreur. La première de ces deux approximations conduit à la méthode d´Euler (Analyse 10). L´expérimentation numérique avec un logiciel ou une calculatrice permet bien de mettre en évidence le phénomène.
b) Étude de fonctions et recherche d'asymptotes	
Méthodologie d'étude d'une fonction.	La convexité comme l'étude des courbes paramétrées sont hors-programme.
Étude des branches infinies : branches paraboliques, recherche de droites asymptotes et étude de la position de la courbe par rapport à ses asymptotes.	
Exemples de démarches de résolutions approchées d'équations de la forme $f(x) = 0$, f étant une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ au moins sur un intervalle de $\mathbf{R}$.	On choisit des exemples mettant en évidence la nécessité de séparer les racines. ⇋ On présente la méthode de Newton comme algorithme d'approximation.

Exemples de capacités : calculer et utiliser des développements limités ; effectuer une recherche d'asymptote ; mener une démarche d'approximation.

Algèbre linéaire 3 – Espaces vectoriels et sous-espaces vectoriels

L'espace vectoriel, comme objet général et abstrait, n'est formellement présenté qu'en seconde année.

Ce choix a pour ambition de donner aux étudiants une connaissance et une habitude « pratique » du calcul multidimensionnel qui confèrera à l'introduction de la notion générale d'espace vectoriel un arrière-plan concret. Le but est donc, en première année, de faire maitriser les concepts fondamentaux sans excès de technicité ni d'abstraction en centrant le travail sur le calcul matriciel et les systèmes linéaires. Le lien avec la géométrie est à faire en chaque occasion propice.

On travaille dans $K = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.

Contenus	Commentaires
a) Structure vectorielle	
Description de la structure vectorielle de K^n, règles de calcul.	On fait le lien avec les règles de calcul des vecteurs du plan et de l'espace de la géométrie.
Combinaison linéaire d'une famille finie de vecteurs. Sous-espaces vectoriels.	On entend par sous-espace vectoriel un ensemble de vecteurs stable par combinaison linéaire et contenant le vecteur nul.
Intersection d'un nombre fini de sous-espaces vectoriels.	
Sous-espace vectoriel engendré par une famille finie de vecteurs.	On utilise la notation $\text{Vect}(x_1, x_2, \ldots x_k)$.
Famille génératrice finie d'un sous-espace vectoriel. Famille libre finie, famille liée finie.	

© Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche, 2013
http://www.enseignementsup-recherche.gouv.fr

Contenus (suite)	Commentaires
Bases d'un sous-espace vectoriel.	On admet l'existence de bases pour tout sous-espace vectoriel.
Coordonnées d'un vecteur par rapport à une base.	Une interprétation matricielle est ici pertinente, amenant à parler de la matrice colonne associée au vecteur, puis de la matrice d'une famille de vecteurs.
Base canonique de K^n.	
b) Dimension	
Dimension.	On admet que toutes les bases d'un sous-espace vectoriel ont même cardinal appelé dimension du sous-espace vectoriel.
Dans un sous-espace vectoriel de dimension p : • Toute famille libre a au plus p éléments. • Une famille libre ayant p éléments est une base. • De toute famille génératrice on peut extraire une base. • Toute famille génératrice a au moins p éléments. • Une famille génératrice ayant p éléments est une base.	Compte tenu des objectifs pédagogiques, la plupart de ces énoncés doivent être admis, mais on peut montrer comment certains de ces résultats peuvent en impliquer d'autres. On complète ces propositions par l'étude du cas particulier des familles orthogonales de deux ou trois vecteurs de l'espace de dimension 2 ou 3. Le théorème de la base incomplète est hors programme.
Si E et F sont deux sous-espaces vectoriels de K^n avec $F \subset E$, alors $\dim F \leq \dim E$; et si les deux dimensions sont égales, alors $F = E$.	
Rang d'une famille finie de vecteurs.	Le rang peut se calculer pratiquement en adaptant la méthode du pivot aux familles finies de vecteurs.

Exemples de capacités : choisir une base adéquate pour traduire un problème de manière simple ; calculer un rang ou une dimension.

Note : *la structure d'espace vectoriel peut être observée dans d'autres contextes que celui qui est précisé ici (fonctions, suites et polynômes), ce qui prépare le travail qui sera fait en seconde année.*

Algèbre linéaire 4 – Applications linéaires et matrices

On travaille dans $K = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.

Contenus	Commentaires
Définition d'une application linéaire de K^p dans K^n.	
Opérations sur les applications linéaires : addition, multiplication par un scalaire, composition, réciproque. Propriétés de ces opérations.	
Noyau, image. Lien avec : f injective, f surjective, f bijective.	
Détermination d'une application linéaire par l'image des vecteurs d'une base. Matrice d'une application linéaire dans des bases.	
Matrice de la somme de deux applications linéaires, du produit par un scalaire d'une application linéaire, de la composée de deux applications linéaires, de l'application réciproque.	

Contenus (suite)	Commentaires
Rang d'une application linéaire.	On fait le lien entre les différentes notions de rang, vues à propos des systèmes, des familles de vecteurs, des matrices et des applications linéaires.

Exemples de capacités : obtenir la matrice d'une application linéaire dans des bases données ; déterminer un noyau ou une image.

Note : *Les différentes parties de ce programme permettent de faire observer la linéarité d'une application dans d'autres contextes que celui qui est envisagé ici.*

Analyse 9 – Intégration

Contenus	Commentaires
a) Notions fondamentales	
Intégrale d'une fonction continue f sur un segment : F étant une primitive de f sur $[a, b]$, on pose $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - F(a)$.	L'existence de primitives pour une fonction continue sur un segment est admise.
Lien avec la notion d'aire pour une fonction continue positive.	
Propriétés de l'intégrale : linéarité, relation de Chasles, positivité, encadrement de l'intégrale à partir d'un encadrement de la fonction. Pour $a < b$, majoration $\left\|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right\| \leq \int_a^b \|f(t)\|\,\mathrm{d}t$.	
Si f est continue sur un intervalle I et a un point de I, alors la fonction F définie sur I par : $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est l'unique primitive de f sur I s'annulant en a.	
Valeur moyenne d'une fonction continue sur un segment.	La valeur moyenne appartient à l'ensemble des valeurs atteintes par la fonction.
b) Compléments	
Sommes de Riemann sur $[0, 1]$: $\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$	Ce résultat est admis.
Intégrale d'une fonction continue par morceaux. Cas d'une fonction en escalier.	On donne seulement les définitions.
Intégration par parties.	Au cours d'une épreuve, sauf dans les cas simples, la nécessité d'une intégration par parties sera indiquée.
Changement de variables.	Au cours d'une épreuve, sauf dans les cas simples, le changement de variable sera donné.

Exemples de capacités : calculer une intégrale au moyen d'une primitive ; encadrer une intégrale.

Analyse 10 – Équations différentielles

Le but de ce chapitre est de développer une familiarité avec une diversité de modèles différentiels utilisés dans les autres enseignements scientifiques, sans verser pour autant dans une technicité hors de propos. Les problèmes de recollement de solutions ne sont pas un attendu du programme.

Contenus	**Commentaires**
a) Équations du premier ordre	
Résolution (formelle) des équations différentielles du type $y' + a(t)y = f(t)$, où a et f sont des fonctions continues sur un intervalle et à valeurs réelles. Méthode de la variation de la constante.	Pour toute autre équation différentielle une méthode de résolution doit être fournie.
Exemples de résolution d'équations différentielles incomplètes (ou autonomes) du type $y'(t) = F(y(t))$, F étant une fonction continue sur un intervalle et à valeurs réelles.	Aucune théorie générale ne doit être faite. ⇆ On se limite ici à quelques exemples issus de la biologie des populations ou de la cinétique chimique (modèles malthusien, logistique, de Gompertz). ⇆ L´usage d´un algorithme de résolution approchée (programmé selon la méthode d´Euler ou fourni par un logiciel) peut intervenir en complément des méthodes de résolution formelle.
b) Équations du second ordre	
Résolution de $y'' + ay' + by = f(t)$ où a et b sont réels et f une fonction continue sur un intervalle, quand la forme d'une solution particulière est donnée.	Lorsque f est de la forme $t \mapsto P(t)\mathrm{e}^{mt}$ (m étant un réel et P un polynôme), on proposera de chercher une solution du type $t \mapsto Q(t)\mathrm{e}^{mt}$, Q étant un polynôme dont on indiquera le degré. Lorsque f est de la forme $t \mapsto \sin(\omega t)$ ou $t \mapsto \cos(\omega t)$, on proposera de chercher une solution du type $t \mapsto \lambda \sin(\omega t) + \mu \cos(\omega t)$ ou $t \mapsto \lambda t \sin(\omega t) + \mu t \cos(\omega t)$, λ et μ étant à déterminer.
Principe de superposition.	⇆ Linéarité des « sorties » (la fonction y) par rapport aux « entrées ».

Exemples de capacités : résoudre (formellement) une équation différentielle linéaire ou à variables séparables ; utiliser un logiciel ou un algorithme pour tracer des solutions approchées.

Analyse 11 – Fonctions réelles de deux variables réelles

Les étudiants sont amenés à manipuler, dans les autres sciences, des fonctions de plusieurs variables. En mathématiques, et dans un but de simplification, on se contente de l'étude de fonctions de deux variables réelles et à valeurs réelles, quitte à faire observer aux étudiants que l'étude de fonctions de trois variables n'est pas foncièrement différente. Les questions de régularité (limites, continuité, classe $\mathcal{C}^1$) doivent être évoquées avec une grande parcimonie et en se basant sur l'intuition avant tout. Aucune difficulté ne sera soulevée au sujet des domaines de définition des fonctions considérées.

Ces notions ne pourront constituer le thème principal d'aucune question d'écrit ou d'oral.

On s'appuie sur la présentation des dérivées partielles figurant dans Analyse 3.

Contenus	**Commentaires**
Fonction de deux variables continue, de classe $\mathcal{C}^1$ sur un pavé ouvert du plan.	On se contente d'une approche très intuitive de la notion de continuité, pouvant être soutenu par des illustrations graphiques. L'écriture d'une définition formalisée est hors-programme.

Contenus (suite)	Commentaires
Surface représentative d'une fonction de deux variables, courbes ou lignes de niveau.	On souligne le lien entre fonctions partielles et certaines sections de cette surface. ⇆ Des illustrations tirées de problèmes de cartographie, thermodynamique ou géologie sont ici pertinentes.
Utilisation des dérivées partielles premières pour évaluer une petite variation de la valeur d'une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ découlant de petites variations sur les variables.	
Dérivation d'une expression de la forme $f(x(t), y(t))$, la fonction f étant de classe $\mathcal{C}^1$ et les fonctions x, y étant dérivables.	
Définition du gradient ; calcul dans un repère orthonormal en coordonnées cartésiennes.	
Dérivées partielles d'ordre deux, interversion des dérivations.	Le théorème de Schwarz est admis.
Pour une fonction définie sur un pavé ouvert du plan, et admettant des dérivées partielles : les dérivées partielles en un extrémum s'annulent.	Aucune étude du problème réciproque (condition suffisante d'extrémalité) n'est au programme. On applique ce résultat pour expliquer l'ajustement affine par les moindres carrés.

Exemples de capacités : approcher la variation d'une fonction de deux variables au moyen des dérivées partielles ; calculer des dérivées partielles d'ordre deux.

Probabilités 2 – Variables aléatoires finies

En première année on se limite aux variables aléatoires réelles ne prenant qu'un nombre fini de valeurs.

Contenus	Commentaires
a) Variables aléatoires finies	
On nomme variable aléatoire sur Ω toute application de Ω dans $\mathbf{R}$.	
La loi [de probabilité] d'une variable aléatoire X est l'application f_X de $X(\Omega)$ dans $\mathbf{R}$ associant à tout x de $X(\Omega)$ le nombre $f_X(x) = P(X = x)$. La fonction de répartition de X est l'application F_X de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ associant à tout t réel le nombre $F_X(t) = P(X \leq t)$.	On rappellera les représentations graphiques de ces deux fonctions, respectivement en bâtons et en escaliers. Les étudiants doivent savoir déterminer la loi d'une variable aléatoire à partir de sa fonction de répartition. Les propriétés générales des fonctions de répartition (continuité à droite, limites...) ne sont pas au programme.
Espérance mathématique $\mathrm{E}(X)$ d'une variable aléatoire X. Propriétés.	On démontre que l'espérance est positive (si X est positive) et croissante. La linéarité est énoncée mais admise à ce stade.
Théorème de transfert : espérance de $u(X)$ à partir de la loi de X.	Résultat admis.
Moments. Variance $\mathrm{V}(X)$ d'une variable aléatoire X. Écart-type $\sigma(X)$ d'une variable aléatoire X.	On met en valeur la formule $\mathrm{V}(aX + b) = a^2\mathrm{V}(X)$. On définit à cette occasion la notion de variable centrée et celle de variable centrée réduite.
Inégalité de Bienaymé–Tchebychev.	

Contenus (suite)	Commentaires
b) Lois usuelles	
Loi certaine, uniforme, de Bernoulli, binomiale, hypergéométrique.	Les étudiants doivent savoir reconnaitre les situations classiques de modélisation par des lois uniformes, de Bernoulli, hypergéométrique et binomiale. On fait le lien entre la loi de Bernoulli et les variables indicatrices.
Approximation d'une loi hypergéométrique par une loi binomiale.	La convergence en loi est hors-programme.
Espérance et variance d'une variable de loi certaine, d'une variable de loi de Bernoulli (ou indicatrice) et d'une variable de loi binomiale.	
Espérance d'une variable de loi uniforme sur $\{1, 2, \dots, n\}$ et d'une variable de loi hypergéométrique.	La formule de la variance d'une variable de loi uniforme ou hypergéométrique n'est pas un attendu du programme
c) Couples de variables aléatoires finies	
Couple (X, Y) de deux variables aléatoires finies.	
Loi conjointe, lois marginales.	
Lois conditionnelles.	
Loi de la somme de deux variables aléatoires à valeurs entières positives.	
Théorème de transfert : espérance de $u(X, Y)$ à partir de la loi de (X, Y).	Ce résultat est admis mais peut être utilisé pour justifier la linéarité de l'espérance.
Covariance $\mathrm{Cov}(X, Y)$.	
Variance de $X + Y$.	
Indépendance de deux variables aléatoires.	
Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes, alors $u(X)$ et $v(Y)$ sont indépendantes.	Résultat admis.
d) Généralisation au cas de n variables aléatoires.	
Espérance de la somme de n variables aléatoires.	
Indépendance (mutuelle) de n variables aléatoires.	
Propriétés de l'indépendance mutuelle : • Si $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont indépendantes, toute sous-famille l'est aussi. • Si $X_1, X_2, \dots, X_n, X_{n+1}, \dots, X_{n+p}$ sont des variables aléatoires indépendantes, alors $u(X_1, X_2, \dots, X_n)$ et $v(X_{n+1}, \dots, X_{n+p})$ sont indépendantes. • Si $X_1, X_2, \dots, X_p$ sont des variables aléatoires indépendantes, alors $u_1(X_1), u_2(X_2), \dots, u_p(X_p)$ sont indépendantes.	Les résultats sont admis.
Variance d'une somme de n variables aléatoires indépendantes.	
Loi de la somme de n variables de Bernoulli indépendantes et de même paramètre.	

Exemples de capacités : modéliser une expérience aléatoire au moyen d'une variable aléatoire ; démontrer que des variables aléatoires sont indépendantes ; calculer une espérance ; calculer une variance.

© Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche, 2013