2 B.C.P.S.T – VÉTO 2

Espaces vectoriels de dimension finie

Mercredi 2 octobre 2013

1. Les espaces vectoriels suivants sont-ils de dimension finie ? Si oui, en déterminer une base.
   (a) $F_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{C}^3 \,,\, x+y+z=0 \text{ et } x+iy-z=0\}$
   (b) $F_2 = \{P \in \mathbb{R}_5[X] \,,\, (X-2)\big|P\}$
   (c) $F_3 = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \,,\, f^{(3)} = 0\}$
   (d) $F_4 = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \,,\, f'' = -f\}$
   (e) $F_5 = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \,/\, \exists (P,Q) \in (\mathbb{R}_1[X])^2 \,,\, \forall x \in \mathbb{R} \,,\, f(x) = P(x)e^{3x} + Q(x)e^{-3x}\}$
   (f) $F_6 = \{(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \,,\, \lim u_n = 0\}$

2. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et H_1 et H_2 deux hyperplans de E. Quelles peuvent être les différentes valeurs possibles de $\dim(H_1 \cap H_2)$.

3. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, et F et G deux sous-espaces vectoriels de E tels que $\dim(F) + \dim(G) > \dim(E)$. Montrer que F et G ont au moins un vecteur non nul en commun.

4. Dans chacun des deux cas suivants, déterminer le rang de la famille $\mathscr{F} = (u_i)$:

   a) $u_1 = (1;0;1)$ $\quad u_2 = (0;1;1)$ $\quad u_3 = (1;1;0)$
   b) $u_1 = (1;1;0;0)$ $\quad u_2 = (1;-1;1;0)$ $\quad u_3 = (2;0;1;1)$ $\quad u_4 = (0;-2;1;-1)$

5. On désigne par E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications de classe $\mathscr{C}^n$ sur $\mathbb{R}$ et pour $k \in [\![0,n]\!]$, on considère l'application f_k de E définie par : $\forall x \in \mathbb{R} \,,\, f_k(x) = x^k e^{-x}$.
   (a) Montrer que $F = \left\{ f \in E \,/\, \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} = 0_E \right\}$ est un sous-espace vectoriel de E.
   (b) Montrer que la famille $(f_0, f_1, \ldots, f_{n-1})$ engendre F.
   On pourra utiliser la formule de Leibniz.
   (c) En déduire une base de F.

6. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{R}$ et F l'ensemble défini par : $F = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \,/\, P(a) = 0\}$.
   (a) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$.
   (b) Déterminer une base et la dimension de F.

7. Soit $F = \big\{P \in \mathbb{R}_3[X] \,/\, (X-1)^2\big|P\big\}$.
   (a) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[X]$.
   (b) Déterminer une base de F.
   (c) Trouver un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}_3[X]$.

8. Soient E un espace vectoriel de dimension 3 et $f \in \mathscr{L}(E)$ telle que : $f \neq 0$ et $f^2 = 0$.
   (a) Établir que $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f)$.
   (b) Montrer que $\dim\big(\mathrm{Im}(f)\big) \notin \{0,3\}$.
   (c) En déduire le rang de f et la dimension de $\mathrm{Ker}(f)$.

9. On considère $3\,n$ réels $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ et $(y_1, \ldots, y_n, z_1, \ldots, z_n)$. Démontrer qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$ tel que :

$$\forall i \in [\![1,n]\!] \,,\, P(x_i) = y_i \text{ et } P'(x_i) = z_i$$

   Décrire géométriquement l'intérêt de cette construction.