Test de rentrée 2016

Exercice 1 (complexes)

1. Soit $z \in \mathbb{C}$. Le nombre complexe $Z = 1 + iz$ a pour conjugué $Z = 1 - iz$ et pour module $1 + z^2$.
2. Les solutions de l'équation $z^2 - 3z + 3 = 0$ sont $z_1 = \sqrt{3}\, e^{i\frac{\pi}{6}}$ et $z_2 = \overline{z_1}$.
3. Soit $\alpha \in]-\pi, \pi[$. On a $\dfrac{1 - e^{i\alpha}}{1 + e^{i\alpha}} = i \tan\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)$.
4. On a $\arcsin(\sin(1)) = \arccos(\cos(1)) = \arctan(\tan(1)) = 1$.

Exercice 2 (polynômes)

1. Soit $n \geq 2$. Le nombre 1 est racine exactement double du polynôme $P_n = X^n - nX + n - 1$.
2. Si P est un polynôme de degré $n \in \mathbb{N}^*$, alors le polynôme $nP - P'$ est aussi de degré n.
3. Soit $Q = (X + i)^5 + (X - i)^5$. On a $Q = 2X^5 - 10X^3 + 10X$ et Q possède 5 racines réelles.
4. Le polynôme $P = X^4 + X^2 + 1$ a 4 racines complexes deux à deux opposées et de module 1.

Exercice 3 (systèmes linéaires)

Soit $(\mathcal{S})$ le système de trois équations à trois inconnues x, y, z de paramètre $m \in \mathbb{R}$

$$(\mathcal{S}) \quad \left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & y & & & = & 3 \\ & & y & + & z & = & 1 \\ x & + & my & + & z & = & m+2 \end{array} \right.$$

1. Pour $m \neq 2$, $(\mathcal{S})$ est un système de Cramer (i.e admet une unique solution).
2. Pour $m = 0$, $(\mathcal{S})$ admet pour seule solution le triplet $(2, 1, 0)$.
3. Pour $m = 2$, $(\mathcal{S})$ admet une infinité de solutions.
4. Pour $m = 2$, l'ensemble des solutions du système homogène associé à $(\mathcal{S})$, à savoir

$$(\mathcal{H}) \quad \left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & y & & & = & 0 \\ & & y & + & z & = & 0 \\ x & + & 2y & + & z & = & 0 \end{array} \right.$$

   est la droite vectorielle de $\mathbb{R}^3$ engendrée par $\overrightarrow{d} = (1, -1, 1)$.

Exercice 4 (étude locale de fonctions)

On pose $f(x) = \sqrt{x^2 - x + 1}$.

1. f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \dfrac{2x-1}{\sqrt{x^2-x+1}}$.
2. La courbe de f admet une tangente en 1 d'équation $y = \dfrac{x+1}{2}$.
3. $f(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} x$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - x = 0$.
4. f réalise une bijection de $I = \left[\dfrac{1}{2}, +\infty\right[$ de $J = \left[\dfrac{3}{2}, +\infty\right[$ et, pour tout $y \in J$, $f^{-1}(y) = \dfrac{1 + \sqrt{4y^2 - 3}}{2}$.

Exercice 5 (DL)

1. En intégrant le DL de $x \longmapsto \dfrac{1}{1+x^2}$, on obtient le DL à l'ordre 5 en 0 de arctan suivant : $\arctan(x) \underset{x \to 0}{=} x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} + o\left(x^5\right)$.
2. On a le $DL_3(0)$ suivant : $\dfrac{e^x + e^{-x}}{2} \underset{x \to 0}{=} 1 + \dfrac{x^2}{2} + o\left(x^3\right)$.
3. On a $\sin\left(\dfrac{1}{n}\right) + \dfrac{1}{n} \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{2}{n}$ et $\sin\left(\dfrac{1}{n}\right) - \dfrac{1}{n} \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{1}{3n^3}$.
4. Le DL à l'ordre 2 en 0 de $x \longmapsto \dfrac{x}{\ln(1+x)}$ est donné par $\dfrac{x}{\ln(1+x)} \underset{x \to 0}{=} 1 + \dfrac{x}{2} + \dfrac{x^2}{4} + o\left(x^2\right)$.

Exercice 6 (suites et sommes)

1. Soit $\left(u_n\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ par
$$v_1 = 1 \quad \text{et} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad v_{n+1} = -2v_n$$
La suite $\left(u_n\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est géométrique et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = (-2)^n$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $\sum\limits_{k=1}^{n} (-2)^k = \dfrac{1 - (-2)^n}{3}$.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\cos(t)}\right)^n \mathrm{d}t$. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est minorée par 0 et décroissante, donc converge.
4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $\sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k \dbinom{n}{k} = 0$ et $\sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k 2^{n-k} = 1$.

Exercice 7 (calcul d'intégrales)

1. On a $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin(t)}{\cos(t)}\,\mathrm{d}t = \frac{\ln(2)}{2}$ et $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin(t)}{\cos^2(t)}\,\mathrm{d}t = \sqrt{2}-1$.
2. A l'aide du changement de variable $x = 2u+1$ (soit $u = \dfrac{x-1}{2}$), on trouve $\displaystyle\int_0^{\frac{3}{2}} \frac{3u}{\sqrt{2u+1}}\,\mathrm{d}u = 1$.
3. A l'aide d'une IPP, on obtient $\displaystyle\int_0^1 \arctan(t)\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4} - \ln(2)$.
4. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $\sin^2(\theta) = \dfrac{1+\cos(2\theta)}{2}$ et $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2(\theta)\,\mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}$.

Exercice 8 (suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$)

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$u_0 \in [0,1] \quad \text{et} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{u_n^2}{2-u_n}$$

1. La fonction $f : x \longmapsto \dfrac{x^2}{2-x}$ est croissante sur $[0,1]$ et on a l'équivalence

$$f(x) = x \iff \big(x = 0 \text{ ou } x = 1\big)$$

2. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0,1]$.
3. La suite $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et converge vers 1.
4. La fonction f admet un développement asymptotique au voisinage de $+\infty$ donné par $f(x) \underset{x\to+\infty}{=} -x - 2 + \dfrac{2}{x} + o\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

Exercice 9 (matrices et applications linéaires)

Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x, x+y, y+z) \end{array}$. On pose également

$$N = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A = I_3 - N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. A est inversible et $A^{-1} = I_3 + N + N^2$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = I_3 - nN + \frac{n(n-1)}{2}N^2$.
3. f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ et sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est A.
4. f est injective, mais non surjective.

Exercice 10 (edl)

1. Les solutions de l'équation différentielle $y' + y = 0$ sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions de la forme $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & e^{-x} + C \end{array}$ avec C une constante réelle.
2. Les solutions de l'équation différentielle $z'' + z = 0$ sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions de la forme $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & Ae^{x} + Be^{-x} \end{array}$ avec A et B des constantes réelles.
3. La fonction $h : x \longmapsto x\cos(2x)$ est solution de l'équation différentielle $z'' + z = -\sin(2x)$ sur $\mathbb{R}$.
4. L'ensemble des solutions de l'équation différentielle $2xy' + (1 - \sqrt{x})y = -1$ sur $]0, +\infty[$ est
$$\left\{ y : \begin{array}{ccc}]0, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{Ke^{\sqrt{x}} + 1}{\sqrt{x}} \end{array} \quad : \quad K \in \mathbb{R} \right\}$$

Exercice 11 (probas, var)

On dispose de 4 dés (un bleu, un rouge, un vert et un jaune).

1. On lance les 4 dés. Si X est la v.a.r. égale au nombre de faces '6' obtenus, X suit une loi usuelle et $E(X) = \dfrac{2}{3}$.
2. On lance les 4 dés. On note A l'événement « on a obtenu deux faces '6' en tout ». On a $P(A) = \dfrac{25}{6^4}$.
3. On lance les 4 dés. On note B l'événement « on a obtenu 4 faces différentes ». On a $P(B) = \dfrac{5}{18}$.
4. On lance le dé bleu : s'il fait '6', on arrête, sinon on lance le dé rouge. Si le dé rouge fait '6', on arrête, sinon on lance le dé vert. On note B l'événement « on a obtenu la face '6' ». On a $P(B) = \dfrac{91}{216}$.

Exercice 12 (probas, var, matrices)

Un interrupteur a deux positions : 0 ou 1. A l'instant $t = 0$, il est en position 0. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, à l'instant $t = n + 1$, il conserve la position qu'il avait à l'instant $t = n$ avec la probabilité $p = \dfrac{1}{3}$ (et change donc de position avec la probabilité $1 - p = \dfrac{2}{3}$). On note X_n la v.a.r. qui donne la position de l'interrupteur à l'instant $t = n$. On pose $A = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Si on pose $Y_n = \begin{pmatrix} P(X_n = 0) \\ P(X_n = 1) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Y_{n+1} = AY_n$.
2. $Y_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Y_n = Y_0 A^n$.
3. On a $A = PDP^{-1}$ où $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, puis $A^n = P^n D^n \left(P^{-1}\right)^n$.
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, X_n suit une loi de Bernoulli de paramètre $p_n = \dfrac{3^n - (-1)^n}{6}$.