MATHÉMATIQUES
Devoir surveillé n°5
Durée : 2 heures 30

L'usage d'une calculatrice est <u>autorisé</u> pour cette épreuve. Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

L'épreuve comporte comporte un exercice et un problème indépendants.

EXERCICE (coefficient 1)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $\forall u \geq 0,\ f(u) = \dfrac{1}{2}u - \dfrac{u^2}{1+u^2}$

1. Résoudre l'équation $f(u) = 0$

2. Déterminer trois réels A, B, C tels que : $\forall u \in \left]0,1\right[\cup \left]1,+\infty\right[,\ \dfrac{1}{f(u)} = \dfrac{A}{u} + \dfrac{B}{(u-1)^2} + \dfrac{C}{(u-1)}$.

3. On note G et H les fonctions définies respectivement sur $\left[\frac{1}{2};1\right[$ et $\left[\frac{3}{2};+\infty\right[$ par :

$$\forall y \in \left[\frac{1}{2};1\right[,\ G(y) = \int_{\frac{1}{2}}^{y} \frac{1}{f(u)}\,\mathrm{d}u \quad \text{et} \quad \forall y \in \left[\frac{3}{2};+\infty\right[,\ H(y) = \int_{\frac{3}{2}}^{y} \frac{1}{f(u)}\,\mathrm{d}u$$

(a) Déterminer les valeurs de $G(y)$ pour tout $y \in \left[\frac{1}{2};1\right[$ et de $H(y)$ pour tout $y \in \left[\frac{3}{2};+\infty\right[$.

(b) Etudiez les variations des fonctions G et H.

(c) Vérifier que G réalise une bijection de $\left[\frac{1}{2};1\right[$ vers $[0;+\infty[$ et que H réalise une bijection de $\left[\frac{3}{2};+\infty\right[$ vers $[0;+\infty[$.

(d) Donner l'allure des courbes représentatives des fonctions G et H.

4. On note G^{-1} et H^{-1} les applications réciproques respectives des bijections G et H.
On considère l'équation différentielle : $\dfrac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}(t) = \frac{1}{2}N(t) - \dfrac{N(t)^2}{1+N(t)^2}$

(a) Montrer que G^{-1} est la seule solution sur $[0;+\infty[$ de l'équation différentielle vérifiant $N(0) = \frac{1}{2}$.

(b) Montrer que H^{-1} est la seule solution sur $[0;+\infty[$ de l'équation différentielle vérifiant $N(0) = \frac{3}{2}$.

(c) Donner l'allure des courbes représentatives de ces deux solutions.

PROBLÈME (coefficient 3)

Nous noterons $\mathcal{B} = \langle(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\rangle$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et désignerons par Id, f et g les endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ dont les matrices dans la base $\mathcal{B}$ valent respectivement par :

$$\mathrm{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Pour toutes fonctions u, v, w réelles dérivables sur $\mathbb{R}$, nous désignerons par Φ et Φ' les fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}^3$ définies par :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \Phi(t) = \Big(u(t), v(t), w(t)\Big) \quad ; \quad \Phi'(t) = \Big(u'(t), v'(t), w'(t)\Big)$$

Partie 1

1. Soit λ un réel quelconque.

- Discuter selon les valeurs de λ le nombre de solutions X de l'équation $AX = \lambda X$
- Discuter selon les valeurs de λ le nombre de solutions X de l'équation $BX = \lambda X$.
  En déduire les valeurs propres des endomorphismes f et g et préciser les dimensions de leurs espaces propres.

2. Les matrices A et B sont-elles diagonalisables ? *Il va de soi que vous devez justifier votre réponse.*

3. Déterminer une base $\mathcal{B}_1 = \langle \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \rangle$ de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est diagonale, puis une base $\mathcal{B}_2 = \langle \varepsilon'_1, \varepsilon'_2, \varepsilon'_3 \rangle$ de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de g est triangulaire supérieure à coefficients entiers.

4. Soit P la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}_1$ et Q la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}_2$.
Explicitez **dans cet ordre** les matrices $D = P^{-1}AP$ et $T = Q^{-1}BQ$, puis les matrices P et Q.
Expliciter **à l'aide de votre calculatrice** les matrices P^{-1} et Q^{-1}.

Nous réutiliserons dans la suite de ce problème les matrices P, Q, $D = P^{-1}AP$ et $T = Q^{-1}BQ$.

Partie 2

Si u, v, w sont trois fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ dérivables sur $\mathbb{R}$, nous noterons $(\mathcal{S}_1)$ le système d'équations différentielles suivant :

$$(\mathcal{S}_1) \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} u'(t) & = & 5\,u(t) + v(t) - w(t) + e^t \\ v'(t) & = & 2\,u(t) + 4\,v(t) - 2\,w(t) + e^{2t} \\ w'(t) & = & u(t) - v(t) + 3\,w(t) - te^t \end{array} \right.$$

1. Montrer que le système $(\mathcal{S}_1)$ équivaut à l'équation différentielle $(E_1) : \Phi'(t) = f(\Phi(t)) + \left(e^t, e^{2t}, -t\,e^t\right)$.

2. Soient $(a(t), b(t), c(t))$ les coordonnées de $\Phi(t)$ dans la base $\mathcal{B}_1 = \langle \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \rangle$.

(a) Montrer que l'équation différentielle (E_1) équivaut au système :

$$(\mathcal{S}'_1) \qquad \left\{ \begin{bmatrix} a'(t) \\ b'(t) \\ c'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\,a(t) \\ 4\,b(t) \\ 6\,c(t) \end{bmatrix} + P^{-1} \begin{bmatrix} e^t \\ e^{2t} \\ -te^t \end{bmatrix} \right.$$

(b) Déterminer le triplet $(a(0), b(0), c(0))$ de sorte que $u(0) = 0$, $v(0) = 0$, $w(0) = 1$.

3. Résoudre $(\mathcal{S}'_1)$ avec les conditions initiales $a(0)$, $b(0)$, $c(0)$ trouvées précédemment. En déduire la solution de $(\mathcal{S}_1)$ vérifiant les conditions initiales $u(0) = 0$, $v(0) = 0$, $w(0) = 1$.

Partie 3

Si u, v, w sont trois fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ dérivables sur $\mathbb{R}$, nous noterons $(\mathcal{S}_2)$ le système d'équations différentielles suivant :

$$(\mathcal{S}_2) \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} u'(t) & = & 2\,u(t) + w(t) \\ v'(t) & = & -u(t) + v(t) - w(t) \\ w'(t) & = & u(t) + 2\,v(t) \end{array} \right.$$

1. Montrer que le système $(\mathcal{S}_2)$ équivaut à l'équation différentielle $(E_2) : \Phi'(t) = g(\Phi(t))$.

2. Soient $(a(t), b(t), c(t))$ les coordonnées de $\Phi(t)$ dans la base $\mathcal{B}_2 = \langle \varepsilon'_1, \varepsilon'_2, \varepsilon'_3 \rangle$.

(a) Montrer que l'équation différentielle (E_2) équivaut au système :

$$(\mathcal{S}'_2) \qquad \left\{ \begin{bmatrix} a'(t) \\ b'(t) \\ c'(t) \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} a(t) \\ b(t) \\ c(t) \end{bmatrix} \right.$$

(b) Déterminer le triplet $(a(0), b(0), c(0))$ de sorte que $u(0) = 1$, $v(0) = 2$, $w(0) = 1$.

(c) Résoudre $(\mathcal{S}'_2)$ avec les conditions initiales $a(0)$, $b(0)$, $c(0)$ trouvées précédemment. En déduire la solution de $(\mathcal{S}_2)$ vérifiant les conditions initiales $u(0) = 1$, $v(0) = 2$, $w(0) = 1$.