2 BCPST 1 & 2 Samedi 20 octobre 2012

MATHÉMATIQUES
Devoir surveillé n°2
Durée : 3 heures 30

L'usage d'une calculatrice est interdit pour cette épreuve. Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Exercice

Soit u un endomorphisme non nul de $\mathbb{R}^3$ tel que : $u^3 = -u$ où u^3 désigne l'endomorphisme $u \circ u \circ u$.
On note id l'application identique de $\mathbb{R}^3$ vers $\mathbb{R}^3$.
Nous admettrons qu'un tel endomorphisme u de R^3 ne peut être injectif.

1. Montrer que : $\mathrm{Im}(u^2 + id) \subset \mathrm{Ker}(u)$.
2. Montrer que : $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}(u) \oplus \mathrm{Ker}\left(u^2 + id\right)$.
3. Justifier que $\mathrm{Ker}\left(u^2 + id\right) \neq \{0\}$.
4. Soit x un vecteur non nul de $\mathrm{Ker}\left(u^2 + id\right)$. Montrer que $(x, u(x))$ est une base de $\mathrm{Ker}\left(u^2 + id\right)$.
5. Montrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de u est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
6. Soit $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ une matrice non nulle. Justifier l'équivalence suivante :

$$A^3 + A = 0 \Longleftrightarrow A \text{ est semblable à } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

PROBLEME N°1

Dans tout ce problème, E désigne le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions réelles de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. On note D l'application qui à toute fonction associe sa dérivée $D(f) = f'$.
On considère les trois fonctions f_1, f_2 et f_3 définies par :

$$f_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & e^t \end{array} \qquad f_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & e^{-\frac{t}{2}} \sin\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right) \end{array} \qquad f_3 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & e^{-\frac{t}{2}} \cos\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right) \end{array}$$

Enfin, on pose $\mathscr{B} = (f_1, f_2, f_3)$ et $G = \mathrm{Vect}(f_1, f_2, f_3)$.

Partie I - Étude de l'application D

1. (a) Démontrer que D est un endomorphisme de E.
   (b) Déterminer le noyau et l'image de D.
2. Nous allons démontrer dans cette question, par trois méthodes différentes, que la famille $\mathscr{B}$ est libre. On considère pour cela trois réels a, b et c tels que $af_1 + bf_2 + cf_3 = 0$.

(a) *Première méthode :*
On a : $\forall t \in \mathbb{R}, af_1(t)+bf_2(t)+cf_3(t) = 0$. Choisir habilement trois valeurs de t puis résoudre le système de trois équations aux trois inconnues a, b et c obtenu. Conclure.

(b) *Deuxième méthode :*
Exploiter le développement limité de f à l'ordre 2 de la fonction $af_1+bf_2+cf_3$ au voisinage de 0. Conclure.

(c) *Troisième méthode :*
Étudier le comportement de $af_1(t)+bf_2(t)+cf_3(t)$ lorsque t tend vers $+\infty$. Conclure.

3. Déterminer une base, ainsi que la dimension, de l'espace G.
4. Démontrer que G est stable par D, c'est-à-dire que : $\forall f \in G, D(f) \in G$.

Dans toute la suite, nous noterons $\widehat{D}$ l'endomorphisme de G induit par D, c'est-à-dire :

$$\widehat{D} : \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & G \\ f & \longmapsto & f' \end{array}$$

5. Déterminer la matrice M de $\widehat{D}$ dans la base $\mathscr{B}$.
6. Calculer M^3.
7. Démontrer que M est inversible, et expliciter son inverse M^{-1}.
8. Démontrer que $\widehat{D}$ est un automorphisme de G.
9. Exprimer $\left(\widehat{D}\right)^{-1}$ en fonction de $\widehat{D}$.

Partie II - Résolution d'une équation différentielle d'ordre 3

On s'intéresse dans cette partie à l'équation différentielle $y''' = y$, notée (ε). Une solution sur $\mathbb{R}$ de (ε) est une fonction f définie et trois fois dérivable sur $\mathbb{R}$, vérifiant $f'''(t) = f(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que toute solution f de (ε) est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer toutes les solutions polynomiales de (ε).

Notons $T = D^3 - \mathrm{Id}$, où Id *est l'identité de E et $D^3 = D \circ D \circ D$. Le noyau de T est donc l'ensemble des solutions de (ε).*

3. Démontrer que $G \subset \mathrm{Ker}(T)$.
4. Nous allons maintenant établir que $\mathrm{Ker}(T) \subset G$. Soit $f \in \mathrm{Ker}(T)$.

(a) Démontrer que la fonction $g = f'' + f' + f$ est solution de l'équation différentielle

$$y' = y \qquad (\varepsilon')$$

(b) Résoudre l'équation (ε').

(c) Résoudre l'équation $y'' + y' + y = 0$.
On donnera notamment une base de l'ensemble des solutions.

(d) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Décrire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle

$$y'' + y' + y = \lambda e^t$$

(e) Conclure.

PROBLEME N°2

E désigne le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des suites réelles. Pour tout entier p et tout endomorphisme f, on note $f^p = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{f \text{ composé } p \text{ fois}}$ et $f^0 = \mathrm{id}$, où id désigne l'endomorphisme identité de E.

On définit l'application τ sur l'ensemble des suites réelles par $\tau : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ u & \longmapsto & \tau(u) \end{array} \right.$ où le terme général de la suite $\tau(u)$ est, pour tout entier naturel n, $\tau(u)_n = u_{n+1}$.

1. (a) Vérifier que τ est un endomorphisme de E.

   (b) Quelles sont les suites réelles du sous-espace $\ker(\tau + 2\,\mathrm{id})$?
   En déduire que cet espace est de dimension 1 et en donner une base.

   (c) i. Démontrer que les vecteurs du noyau de $(\tau - 3\,\mathrm{id})^2$ sont exactement les suites réelles u vérifiant la relation de récurrence linéaire d'ordre 2

   $$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} - 6u_{n+1} + 9u_n = 0.$$

   ii. Rappeler à l'aide d'un résultat de cours la forme des suites solutions de cette récurrence linéaire d'ordre 2.

   iii. En déduire la dimension de $\ker(\tau - 3\,\mathrm{id})^2$.

2. Soit F l'ensemble des suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant :

   $$(*) \quad \forall n \in \mathbb{N},\ \ u_{n+3} - 4u_{n+2} - 3u_{n+1} + 18u_n = 0.$$

   (a) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.

   (b) On considère l'application $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ u = (u_n)_n & \longmapsto & \varphi(u) = (u_0, u_1, u_2) \end{array} \right.$

   i. Montrer que l'application φ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

   ii. En déduire la dimension de F.

3. (a) Vérifier l'identité : $(\tau + 2\,\mathrm{id}) \circ (\tau - 3\,\mathrm{id})^2 = \tau^3 - 4\tau^2 - 3\tau + 18\,\mathrm{id}$.

   (b) En déduire que $F = \ker\big((\tau + 2\,\mathrm{id}) \circ (\tau - 3\,\mathrm{id})^2\big)$.

   i. Justifier que pour f et g endomorphismes de E, on a $\ker f \subset \ker(g \circ f)$.

   ii. En déduire que $\ker(\tau + 2\,\mathrm{id})$ et $\ker(\tau - 3\,\mathrm{id})^2$ sont des sous-espaces vectoriels de F.

   iii. Démontrer que $F = \ker(\tau + 2\,\mathrm{id}) \oplus \ker(\tau - 3\,\mathrm{id})^2$.

4. On considère les trois suites : u, v, w définies par

   $$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (-2)^n,\ v_n = 3^n,\ w_n = n3^n.$$

   Démontrer que la famille (u, v, w) est une base de F.

5. Conclure sur la forme des solutions de l'équation $(*)$.