Correction du devoir n°2

Informatique - notion de récursivité

1. Posons $\left(1+\sqrt{5}\right)^n = A_n + B_n\sqrt{5}$ où A_n et A_n sont entiers (ce sont en fait les entiers A et B que le programme est sensé calculer) on peut établir une relation de récurrence entre ces entiers :
   $\left(1+\sqrt{5}\right)^{n+1} = A_{n+1} + B_{n+1}\sqrt{5} = \left(1+1\sqrt{5}\right)^n \times \left(a+b\sqrt{5}\right) = \left(A_n + B_n\sqrt{5}\right) \times \left(a+b\sqrt{5}\right)^n$
   d'où par identification : $A_{n+1} = a\,A_n + 5\,b\,B_n$ et $B_{n+1} = b\,A_n + a\,B_n$
   Ce qui s'écrit matriciellement : $\begin{bmatrix} A_{n+1} \\ B_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 5b \\ b & a \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} A_n \\ B_n \end{bmatrix}$; on propose alors le programme suivant :

```
import numpy as np

def PUIS(a,b,n):
    M=[[a,5*b],[b,a]]
    if n==0:
        return([1,0])
    else:return(np.dot(M,PUIS(a,b,n-1))) # produit matriciel

def SIGNE(x):
    if x>=0:
        sign=' + '
    else:
        sign=' - '
    return(sign)

n=100;x=1;y=1
titi=PUIS(x,y,n)
print(titi)
A=titi[0];B=titi[1]
print(A);print(B)
print('La puissance '+str(n)+' de '+str(x)+SIGNE(y)+str(abs(y))+' x RACINE('+str(5)+') vaut
print(str(A)+SIGNE(B)+str(abs(B))+' x RACINE('+str(5)+') ')
```

2. ```
   def FIBO(n):
       b,c=1,1 #b représente U_0 et c représente U_1
       for k in range(n):
           b,c=2*b+4*c,b
       return(b)
   ```

3. L'équation caractéristique associée à la suite linéaire récurrente dont on programme le calcul a pour racines $1+\sqrt{5}$ et $1-\sqrt{5}$. Les termes de cette suite sont donc tels qu'il existe $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ tels que $\forall n\in\mathbb{N},\ U_n = \alpha\left(1+\sqrt{5}\right)^n + \beta\left(1-\sqrt{5}\right)^n$; et comme $U_0 = U_1 = 1$, on a $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$.
   De plus, si $\left(1+\sqrt{5}\right)^n = A_n + B_n\sqrt{5}$, alors $\left(1-\sqrt{5}\right)^n = A_n - B_n\sqrt{5}$; ainsi :
   $\forall n\in\mathbb{N},\ U_n = (\alpha+\beta)\,A_n + (\alpha-\beta)\,B_n\sqrt{5} = A_n$
   Le résultat obtenu n'est donc pas une coïncidence.
   ```

EXERCICE

1. Soit $x \in \mathbb{R}$, $T_a(s)(x) = \dfrac{1}{2\,a}\displaystyle\int_{x-a}^{x+a} \sin\left(\dfrac{\pi\,t}{a}\right)\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{2\,a} \times \dfrac{a}{\pi}\left[-\cos\left(\dfrac{\pi\,t}{a}\right)\right]_{x-a}^{x+a}$
$= \dfrac{1}{2\,\pi}\left(\cos\left(\dfrac{\pi\,x}{a} - \pi\right)\cos\left(\dfrac{\pi\,x}{a} + \pi\right)\right) = 0$; ceci est vrai pour tout x réel donc :

$$\boxed{T_a(s) \text{ est la fonction nulle.}}$$

2. (a) Par hypothèse, f est continue sur $\mathbb{R}$, donc admet des primitives sur $\mathbb{R}$. Soit F une primitive de f, F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ (de dérivée f) donc $x \longmapsto \dfrac{1}{2\,a}\displaystyle\int_{x-a}^{x+a} f\,(t)\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{2\,a}\Big(F(x+a)-F(x-a)\Big)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, donc :

$$\boxed{T_a(f) \text{ est de classe } \mathscr{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}}$$

   (b) Soit $f \in E$ telle que $T_a(f)$ est constante sur $\mathbb{R}$; $T_a(f)$ étant de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, on a :
   $T_a(f)$ est une fonction constante $\iff$ $\big(T_a(f)\big)'$ est la fonction nulle $\iff$ $\forall x \in \mathbb{R},\ \big(T_a(f)\big)'(x) = 0$.
   Or $\big(T_a(f)\big)'(x) = \dfrac{1}{2\,a}\Big(f(x+a) - f(x-a)\Big)$, donc $T_a(f)$ est constante $\iff$ $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x+a) = f(x-a)$ c'est à dire f est périodique de période $2\,a$.

3. Pour $f \in E$, $T_a(f)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, donc continue, par conséquent, $T_a(f) \in E$.
   D'autre part, soient f et g deux fonctions quelconques de E et $\lambda \in \mathbb{R}$; on a $\forall x \in \mathbb{R}$:
$$T_a(\lambda\,f+g)(x) = \frac{1}{2a}\int_{x-a}^{x+a}\Big(\lambda\,f\,(t) + g(t)\Big)\,\mathrm{d}t = \frac{\lambda}{2\,a}\int_{x-a}^{x+a} f\,(t)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2a}\int_{x-a}^{x+a} g(t)\,\mathrm{d}t = \lambda T_a(f)(x) + T_a(g)(x)$$
   Ceci est vérifié pour tout x réel donc :
$$\boxed{\forall (f,g) \in E^2,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ T_a(\lambda\,f+g) = \lambda\,T_a(f) + T_a(g),\ T_a \text{ est un endomorphisme de } E.}$$
   T_a n'est pas injectif car s n'est pas la fonction nulle et $T_a(s) = 0_{\mathscr{L}(E)}$. T_a n'est pas surjectif car pour toute fonction f de E, $T_a(f)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$; or il existe des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ qui ne sont pas de classe $\mathscr{C}^1$, donc n'appartiennent pas à $\mathrm{Im}(T_a)$.

PROBLÈME

1. (a) $\mathcal{S}$ n'est pas vide, car la fonction nulle appartient à $\mathcal{S}$.

   Soient f et g deux fonctions quelconques de $\mathcal{S}$ et soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}$: $x\Big(\lambda\,f+g\Big)'(x) = \lambda\,f'(x) + g'(x)$. Or $f \in \mathcal{S}$ donc $x\,f'(x) = 3\,f(x)$, de même $g \in \mathcal{S}$ donc $x\,g'(x) = 3\,g(x)$. On en déduit : $x\Big(\lambda\,f+g\Big)'(x) = \lambda\,x\,f'(x) + x\,g'(x) = 3\Big(\lambda\,f(x) + g(x)\Big)$. Ceci est valable pour tout x réel donc $\lambda\,f + g \in \mathcal{S}$.

   $\mathcal{S}$ est non vide et stable par combinaison linéaire, c'est donc un sous-espace vectoriel de l'ensemble des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

   (b) L'ensemble des fonctions solutions de l'équation différentielle sur $]0,+\infty[$ est l'ensemble des fonctions définies sur $]0,+\infty[$ par : $x \longmapsto K\,x^3$, où K est une constante réelle quelconque.

   (c) L'ensemble des fonctions solutions de l'équation différentielle sur $]-\infty,0[$ est l'ensemble des fonctions définies sur $]-\infty,0[$ par : $x \longmapsto Q\,x^3$, où Q est une constante réelle quelconque.

   (d) Soit f une solution sur $\mathbb{R}$: la restriction de f à l'intervalle $]0,+\infty[$ est de la forme $x \longmapsto K\,x^3$, où K est une constante réelle quelconque ; de même la restriction de f à $]-\infty,0[$ est de la

forme $x \longmapsto Q\,x^3$, où Q est une constante réelle quelconque.
De plus, f est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc en particulier en 0. La continuité de f en 0 entraine : $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0) \in \mathbb{R}$. Or $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = 0$ donc f est continue en 0 quelles que soient les valeurs de K et Q.
Dérivabilité de f en 0 : on remarque que $\forall x > 0, f'(x) = 3\,K\,x^2,\ \forall x < 0, f'(x) = 3\,Q\,x^2$ et $\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} f'(x) = 0$; on pouvait aussi étudier
$\lim_{x\to 0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$ c'est à dire $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{K\,x^3-0}{x}$ et $\lim_{x\to 0^-} \dfrac{Q\,x^3-0}{x}$, qui valent 0, on en déduit alors l'existence, quelles que soient les valeurs de K et Q, de $f'(0)$ ainsi que sa valeur ; soit $f'(0) = 0$.
Réciproquement, on vérifie que s'il existe des constantes réelles K et Q telles que f est définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x > 0,\ f(x) = K\,x^3$ et $\forall x \leqslant 0,\ f(x) = Q\,x^3$, alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ x\,f'(x) = 3\,f(x)$.

Une fonction f est solution de l'équation différentielle sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $f(0) = 0$ et s'il existe deux constantes réelles K et Q telles que :
$\forall x > 0,\ f(x) = K\,x^3,\ \ \forall x < 0,\ f(x) = Q\,x^3$

(e) La question précédente permet d'affirmer que la famille (f_+, f_-) engendre $\mathcal{S}$; montrons à présent qu'il s'agit d'une famille libre :
Soient $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\forall x \in \mathbb{R},\ \alpha\,f_+(x) + \beta\,f_-(x) = 0$.
Cette égalité est vraie en particulier pour $x = 1$: $\alpha \times 1 + \beta \times 0 = 0$, on en déduit $\alpha = 0$.
De même, l'égalité est vraie pour $x = -1$, donc $\alpha \times 0 + \beta \times (-1) = 0$, d'où $\beta = 0$.

La famille (f_+, f_-) est libre et engendre $\mathcal{S}$, c'en est donc une base.

Remarque : On a ainsi montré que $\mathcal{S}$ est un espace de dimension finie : $\dim(\mathcal{S}) = 2$.

2. (a) Pour tout polynôme P, $3\,P$ et $X\,P$ sont des polynômes. De plus, si P est de degré inférieur ou égal à 3, alors $\deg(3\,P) \leqslant 3$, $\deg(P') \leqslant 2$, donc $\deg(X\,P') \leqslant 3$. Il s'ensuit que $\Phi(P)$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à 3.
Vérifions à présent la linéarité de Φ : Soient P et Q deux polynômes de $\mathbb{R}_3[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$:
$\Phi(\lambda\,P + Q) = X\,(\lambda\,P + Q)' - 3\,(\lambda\,P + Q) = \lambda\,(X\,P' - 3\,P) + (X\,Q' - 3\,Q) = \lambda\,\Phi(P) + \Phi(Q)$.

Φ est définie sur E, à valeurs dans E et Φ est linéaire, c'est donc un endomorphisme de E.

(b) Soit $P \in \mathbb{R}_3[X],\ P \in \ker(\Phi) \iff X\,P' = 3\,P$. On pose $P(X) = a\,X^3 + b\,X^2 + c\,X + d$, donc $P'(X) = 3\,a\,X^2 + 2\,b\,X + c$, d'où $X\,\big(3\,a\,X^2 + 2\,b\,X + c\big) = 3\,\Big(a\,X^3 + b\,X^2 + c\,X + d\Big)$, et par identification : $b = c = d = 0$; ainsi $\ker(\Phi) \subset \mathrm{Vect}\big(X^3\big)$
Réciproquement, si $P(X) = a\,X^3$ avec $a \in \mathbb{R}$, alors on vérifie facilement que $\Phi(P) = 0$ donc :

$$\boxed{\ker(\Phi) = \{a\,X^3 \,/\, a \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}\big(X^3\big)}$$

Remarque : on pouvait aussi utiliser la question 1 et remarquer que :
$P \in \ker(\Phi) \iff P$ est un polynôme et $P \in \mathcal{S}$; les seules fonctions polynômes solutions de l'équation différentielle sont celles pour lesquelles $K = Q$, c'est à dire les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto K\,x^3$ où K est une constante réelle quelconque.

(c) Toujours pour $P(X) = a\,X^3 + b\,X^2 + c\,X + d$, on a $\Phi(P) = -b\,X^2 - 2\,c\,X - 3\,d \in \mathbb{R}_2[X]$, donc $\mathrm{Im}(\Phi) \subset \mathbb{R}_2[X]$. Réciproquement, soit $Q \in \mathbb{R}_2[X]$, on résout $\Phi(P) = Q$ où $P \in \mathbb{R}_3[X]$.
Posons $Q(X) = \alpha\,X^2 + \beta\,X + \gamma$, on remarque que le polynôme $P(X) = -\alpha\,X^2 - \frac{\beta}{2}\,X - \frac{\gamma}{3}$ est un antécédent de Q par Φ ; ainsi $\mathbb{R}_2[X] \subset \mathrm{Im}(\Phi)$. Q possède en fait une infinité d'antécédents par Φ, plus précisément $\Phi(P) = Q \iff \exists a \in \mathbb{R}$ tel que $P(X) = a\,X^3 - \alpha\,X^2 - \frac{\beta}{2}\,X - \frac{\gamma}{3}$; on en conclut alors :

$$\boxed{\mathrm{Im}(\Phi) = \mathbb{R}_2[X]}$$

Remarque : on pouvait aussi utiliser la formule du rang :
$\dim\big(\mathbb{R}_3[X]\big) = \dim\big(\ker(\Phi)\big) + \dim\big(\mathrm{Im}(\Phi)\big)$ d'où $\dim\big(\mathrm{Im}(\Phi)\big) = 3$, puis après avoir montré l'inclusion $\mathrm{Im}(\Phi) \subset \mathbb{R}_2[X]$ en déduire l'égalité par égalité des dimensions.

(d) Posons $Q(X) = 2\,X^2 + X - 1$, $Q \in \mathbb{R}_2[X] = \mathrm{Im}(\Phi)$ donc il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}_3[X]$ tel que $\Phi(P) = Q$; soit donc P un antécédent quelconque de Q par Φ : P peut s'écrire sous la forme $P(X) = \alpha\,X^3 + P_1(X)$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$ et $P_1 \in \mathbb{R}_2[X]$ *(α est le coefficient de X^3 de P, c'est à dire son coefficient dominant si P est de degré 3).*

$P_1(X) = P(X) - \alpha\,X^3 \in \mathbb{R}_2[X]$ et vérifie $\Phi(P) = Q$, car $\Phi(\alpha\,X^3) = 0$;

$\boxed{\text{on a ainsi montré l'existence d'une solution polynômiale de degré inférieur ou égal à deux.}}$

D'autre part si P_1 et P_2 sont deux antécédents de Q par Φ, alors $P_1 - P_2 \in \ker(\Phi)$ donc $\exists\, a \in \mathbb{R}\,,\ P_1 - P_2 = a\,X^3$.

Si de plus P_1 et P_2 appartiennent à $\mathbb{R}_2[X]$, alors $\deg(P_1 - P_2) \leqslant 2$ donc nécessairement $a = 0$ et $P_1 = P_2$.

$\boxed{\text{on a ainsi montré l'unicité d'une solution polynômiale de degré inférieur ou égal à deux.}}$

(e) On détermine l'unique antécédent de Q appartenant à $\mathbb{R}_2[X]$ en utilisant les formules établies à la question 2c ; on obient :

$$\boxed{P(X) = -2\,X^2 - \frac{X}{2} + \frac{1}{3}}$$

3. L'équation homogène associée à l'équation différentielle $x\,y' - 3\,y = 2\,x^2 + x - 1$ a été résolue à la question 1. Une solution particulière est la fonction polynômiale P calculée à la question précédente ; $P\,:\,x \mapsto -2\,x^2 - \frac{x}{2} + \frac{1}{3}$ donc d'après le principe de superposition, l'ensemble des solutions de l'équation différentielle sont les fonctions de la forme $f = \lambda\,f_+ + \mu\,f_- + P$ où λ et μ sont des constantes réelles quelconques.

La fonction nulle n'appartient pas à l'ensemble des solutions, donc ce n'est pas un espace vectoriel.

Remarque : on pouvait bien sûr chercher une solution particulière avec la méthode de variation de la constante, mais c'est quand même dommage vu qu'on a déjà déterminé une solution particulière polynômiale question 2e.

Remarque bis : la méthode de variation de la constante fait chercher une solution particulière de la forme $x \mapsto \lambda(x) \times f_0(x)$ où λ est une fonction dérivable inconnue au départ et f_0 une solution de l'équation homogène associée ; il ne faut pas oublier que :

- λ n'est pas unique car déterminée par sa seule dérivée ; on n'écrit jamais : «Donc $\lambda(x) = ...$» mais «On choisit $\lambda(x) = ...$» car le choix de la constante d'intégration est arbitraire.
- On n'oublie pas que ce n'est pas λ la solution particulière mais $\lambda \times f_0$, ceci a valu à certain(e)s de trouver un magnifique polynôme en $\frac{1}{x}$, ce qui est le comble pour un polynôme.