Mathématiques - 2 BCPST 1&2 - Lycée Michel Montaigne

DM N°8 - A rendre le mercredi 6 janvier 2016

« NPP - Nombre le plus probable »

En microbiologie, parmi les méthodes de dénombrement des micro-organismes en milieu liquide, figure en bonne la place la méthode dite du « NPP » dont vous pourrez trouver le protocole sur différents sites web. L'interprétation des résultats observés necessite l'usage de tables bien mystèrieuses.
Nous proposons dans ce devoir de démystifier un peu ce protocole et ces fameuses tables de Mac Grady.

PARTIE I

On considère $3r$ épreuves aléatoires mutuellement indépendantes sur lesquelles sont définies respectivement $3r$ variables aléatoires $X_{11}, \cdots, X_{1r},\ X_{21}, \cdots, X_{2r},\ X_{31}, \cdots, X_{3r}$.
Nous supposerons

- $\forall k \in \{1, \cdots, r\},\ X_{1k}$ est distribuée selon la Loi de Poisson de paramètre λ.
- $\forall k \in \{1, \cdots, r\},\ X_{2k}$ est distribuée selon la Loi de Poisson de paramètre $\frac{\lambda}{10}$.
- $\forall k \in \{1, \cdots, r\},\ X_{3k}$ est distribuée selon la Loi de Poisson de paramètre $\frac{\lambda}{100}$.

Nous poserons alors

- $\forall i \in \{1,2,3\}, \forall k \in \{1, \cdots, r\}\ :\ U_{1k} = \begin{cases} 0 & \text{si } X_{ik} \text{ prend la valeur } 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$
- $A = X_{11} + \cdots + X_{1r}$ et $B = X_{21} + \cdots + X_{2r}$ et $C = X_{31} + \cdots + X_{3r}$.

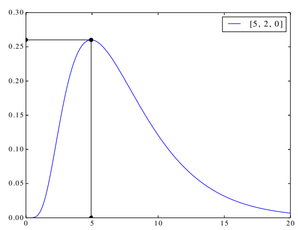
1. Déterminer les Lois de probabilité des variables aléatoires A, B et C.
2. Soit (a, b, c) un triplet quelconque d'entiers compris entre 0 et r.
Nous désignerons par vraisemblance du résultat (a, b, c) au point λ, la probabilité notée $L_\lambda(a, b, c)$ de l'événement $[A = a] \cap [B = b] \cap [C = c]$.
3. On désigne par $f_{a,b,c}$ la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par : $\forall \lambda > 0,\ \ f_{a,b,c}(\lambda) = \ln(L_\lambda(a, b, c))$
Vérifier que
$$f_{a,b,c}(\lambda) = K + \lambda(a + 0.1\,b + 0.01\,c - 1,11\,r) + a\ \ln(1 - e^{-\lambda}) + b\ \ln(1 - e^{-0.1\lambda}) + c\ \ln(1 - e^{-0.01\lambda})$$
où K est une constante.
4. Étude d'un exemple dans le cas $r = 5$: $a = 5,\ \ b = 2,\ \ c = 0$. Nous noterons g la dérivée de $f_{5,2,0}$.
   (a) Vérifier que : $\forall \lambda > 0,\ \ f_{5,2,0}(\lambda) = \ln 10 - 0.35\,\lambda + 5\ \ln(1 - e^{-\lambda}) + 2\ \ln(1 - e^{-0.1\lambda})$.
   (b) Vérifier que : $\forall \lambda > 0,\ \ g(\lambda) = \frac{5}{1-e^{-\lambda}} + \frac{0.2}{1-e^{-0.1\lambda}} - 5.55$ et montrer que g s'annule sur $]0, +\infty[$.

PARTIE II

Nous reprenons la fonction g définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$\forall x > 0,\ \ g(x) = \frac{5}{1 - e^{-x}} + \frac{0.2}{1 - e^{-0.1x}} - 5.55$$

1. Montrer que g s'annule une et une seule fois sur $]0, +\infty[$ en un point $x = \lambda_{\max}$.
2. Montrer que $\lambda_{\max}$ est la valeur de λ pour laquelle la vraisemblance $L_\lambda(5, 2, 0)$ est maximale.
3. Sur le schéma suivant, sont représentés :
   - la courbe représentative de la fonction qui à λ associe $L_\lambda(5, 2, 0)$.
   - le point de coordonnées $(\lambda_{\max}, L_{\lambda_{\max}}(5, 2, 0))$



Ce schéma a été obtenu après exécution du script suivant dont certaines lignes ont été effacées et que vous devez compléter :

```
import numpy as np
from copy import deepcopy
from math import exp,log,factorial
from matplotlib.pyplot import*
#====================Probabilities====================
def ProbaBinomiale(N,p,k):
    prob = ----------------------------------------------
    return prob
def Proba(Lambda,Resultat,r):
    R=1
    for k in range(len(Resultat)):
        p = ------------------------------------
        R = R * -----------------------------
    return R
#=====================================================
def CourbeProba(Resultat,a,b,r):
    X = np.linspace(a,b,1000)
    Y = [ ---------------------------- for Lambda in X]
    plot(X,Y,label=str(Resultat))
    legend()
#=====================================================
def g(x):
    y = -----------------------------------------------
    return y
#=====================================================
def PartieEntiereZero(g):
    a=1
    while g(a)>0:
        a = -----------------------
    return ----------------------
#=====================================================
def Zero(g,Epsilon):
    a=PartieEntiereZero(g)
    b = a+1
    while -----------------------------------
        if -------------------------------
            b = -----------------------------
        else:
            a = -----------------------------
    return a
#================ Programme ======================
Resultat=[5,2,0];a=0;b=20;
NPP=Zero(g,0.00000001)
CourbeProba(Resultat,a,b,5)
ProbaMax=Proba(NPP,Resultat,5)
plot([NPP,NPP],[0,ProbaMax],'o-',color='black')
plot([0,NPP],[ProbaMax,ProbaMax],'o-',color='black')
```

PARTIE III

Nous vous proposons de simuler l'expérience aléatoire précédente. Vous pourrez pour cela utiliser le résultat suivant :

MÉthode de simulation d'une Loi de Poisson de paramètre λ.
Soit X_0, X_1, X_2, X_3, $\cdots$ une suite illimitée de variables aléatoires réelles indépendantes de Loi Uniforme sur $]0,1[$.

On pose alors $Z_n = \displaystyle\prod_{k=0}^{n} X_k$ et l'on désigne par N la plus grande valeur de n telle que : $Z_n \leq \exp(-\lambda)$.

Autrement dit

$$\forall \omega \in \Omega,\ N(\omega) = n \iff \begin{cases} X_0 \times \cdots \times X_n & \leq & \exp(-\lambda) \\ X_0 \times \cdots \times X_n \times X_{n+1} & > & \exp(-\lambda) \end{cases}$$

Nous admettrons le résultat suivant :

La variable aléatoire N ainsi construite est distribuée selon la Loi de Poisson de paramètre λ.

Nous vous proposons alors de compléter le script suivant :

```
from numpy import*
from random import*
#============================ Alea De Poisson ==============================
def ALEA_POISSON(Lambda):
    Hasard=random()
    N=0
    while ____________________________
        N = ____________________________
        Hasard= ________________________
    return N
#============================ SIMULATION ===================================
def SIMULATION(r,Lambda):
    A=0;B=0;C=0
    for k in range(r):
        A = A + ________________________________
        B = B + ________________________________
        C = C + ________________________________
    return [A,B,C]
#***************************PROGRAMME PRINCIPAL***********************
Lambda=1.3
Resultats=[SIMULATION(5,Lambda) for k in range(10)]
print(Resultats)
```

Lors de l'exécution de ce script, les 10 simulations demandées ont donné le résulat suivant :

[[3, 1, 0], [3, 3, 0], [4, 0, 0], [3, 0, 0], [4, 1, 0], [4, 1, 0], [3, 2, 0], [5, 2, 0], [2, 0, 0], [3, 0, 0]]

PARTIE IV

Nous nous intéressons aux micro-organismes contenus dans un certain milieu liquide.
Dans un première pipette, nous versons 1 millilitre du produit pur auquel nous ajoutant 9 ml de diluant.
Dans une seconde pipette, nous versons 1 millilitre de cette solution diluée à laquelle nous ajoutons 9 ml de diluant.
Les hypothèses sont les suivantes :

- Les micro-organismes présents dans la première pipette proviennent du millilitre du produit pur.
  Le nombre X de ces micro-organismes est distribué selon la Loi de Poisson de paramètre λ.
- Les micro-organismes présents dans la seconde pipette proviennent exlusivement du millilitre prélevé dans la solution diluée. Soit Y le nombre de ces micro-organismes.
- Pour chaque micro-organisme de la première pipette, la probabilité de se retrouver dans la seconde pipette vaut $p = \frac{1}{10}$.
  Les comportements des différents micro-organismes dans une solution sont mutuellement indépendants et indépendants du nombre de ces micro-organismes.

1. Préciser la loi conditionnelle de Y sachant $[X = n]$.

2. En déduire que la variable aléatoire Y est distribuée selon la Loi de Poisson de paramètre $\frac{\lambda}{10}$.

3. Montrer que la variable aléatoire $X - Y$ est distribuée selon la Loi de Poisson de paramètre $\frac{9\lambda}{10}$.

4. Montrer que les variables Y et $X - Y$ sont indépendantes.

Annexe

Dans un parc animalier, le nombre de tortues atteignant 100 ans au cours d'une année suit la loi de Poisson de paramètre λ. La probabilité pour une de ces tortues de mourir dans l'année vaut p.
– Soit C le nombre de tortues qui atteindront 100 ans cette année .
– Soit S le nombre de tortues qui atteindront 101 ans l'année prochaine.

1. Déterminer la loi de S sachant $C = n$.
2. Déterminer la loi de S.
3. Déterminer la probabilité qu'il y ait eu n centenaires l'année dernière, sachant que k tortues ont atteint 101 ans cette année.

Solution :

– Premier point.

$$\forall i \in \mathbb{N}, \quad P(C = i) = \frac{\lambda^i}{i!}\, e^{-\lambda}$$

– Second point

- Pour chaque tortue qui atteignent 100 ans cette année, la probabilité de survivre cette année vaut $q = 1 - p$.
- Nous supposerons les décès des tortues ont indépendantes.

Pour i tortues atteignant 100 ans cette année , le nombre S de survivants l'année prochaine suit donc la loi Binomiale $\mathcal{B}(i, q)$.

$$\boxed{\forall i \in \mathbb{N},\ \forall j \in \{0, \cdots, i\}, \quad P_{C=i}(S = j) = \tbinom{i}{j}\, q^j\, p^{i-j}}$$

Loi du couple (C, S).

- $(C, S)(\Omega) = \{(i, j) \in \mathbb{N}^2 \text{ tels que } 0 \leq j \leq i\}$
- Soit (i, j) un couple quelconque d'entiers tels que $1 \leq j \leq i$

$$P([C = i] \cap [S = j]) = P(C = i) \times P_{C=i}(S = j)$$

soit
$$P([C = i] \cap [S = j]) = \frac{\lambda^i}{i!}\, e^{-\lambda} \times \binom{i}{j}\, q^j\, p^{i-j}$$

Conclusion

$$\boxed{\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2, \quad p_{i,j} = P([C = i] \cap [S = j]) = \begin{cases} \dfrac{\lambda^i}{i!}\, e^{-\lambda} \times \binom{i}{j}\, q^j\, p^{i-j} & \text{si} \quad 0 \leq j \leq i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}$$

Loi de la variable S.

A priori, S est susceptible de prendre toute valeur entière naturelle.

$$\forall j \in \mathbb{N}, \quad P(S = j) = \sum_{i=0}^{+\infty} p_{i,j} = \sum_{i=j}^{+\infty} \frac{\lambda^i}{i!}\, e^{-\lambda} \times \binom{i}{j}\, q^j\, p^{i-j}$$

$$P(S = j) = q^j\, e^{-\lambda} \sum_{i=j}^{+\infty} \frac{\lambda^i}{i!} \times \binom{i}{j}\, p^{i-j}$$

Posons $\ell = i - j$

$$\begin{aligned} P(S=j) &= q^j\ e^{-\lambda} \sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{\lambda^i}{i!} \times \frac{i!}{(i-j)!\ j!} \times\ p^\ell \\ &= \frac{q^j}{j!}\ e^{-\lambda} \sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{\ell+j}}{\ell!} \times\ p^\ell \\ &= \frac{(\lambda q)^j}{j!}\ e^{-\lambda} \sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{(\lambda p)^\ell}{\ell!} = \frac{(\lambda q)^j}{j!}\ e^{-\lambda}\ e^{\lambda p} \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\boxed{\begin{array}{c} \forall j \in \mathbb{N}, \quad P(S=j) = \dfrac{(\lambda q)^j}{j!}\ e^{-\lambda q} \\ S \text{ suit la loi de Poisson } \mathcal{P}(\lambda q) \end{array}}$$

<u>Loi de la variable C sachant $S = k$</u>
Pour tout entier $n \geq k$

$$\begin{aligned} P_{S=k}(C=n) &= \frac{P([C=n] \cap [S=k])}{P(S=k)} = \frac{\dfrac{\lambda^n}{n!}\ e^{-\lambda} \times \binom{n}{k}\ q^k\ p^{n-k}}{\dfrac{(\lambda q)^k}{k!}\ e^{-\lambda q}} \\ &= \frac{\dfrac{\lambda^n}{n!}\ e^{-\lambda} \times \dfrac{n!}{(n-k)!\ k!}\ q^k\ p^{n-k}}{\dfrac{(\lambda q)^k}{k!}\ e^{-\lambda q}} = \frac{\lambda^{n-k}}{(n-k)!} \times \frac{e^{-\lambda} \times\ p^{n-k}}{e^{-\lambda q}} \\ &= \frac{(\lambda p)^{n-k}}{(n-k)!}\ e^{-\lambda p} \end{aligned}$$

Notons alors que $P_{S=k}(C - S = \ell) = P_{S=k}(C - k = \ell) = P_{S=k}(C = k + \ell)$

$$\boxed{\begin{array}{c} \forall \ell \in \mathbb{N}, \quad P_{S=k}(C-k=\ell) = \dfrac{(\lambda p)^\ell}{\ell!}\ e^{-\lambda p} \\ \text{La loi conditionnelle de } C-S \text{ sachant } [S=k] \text{ est la loi de Poisson } \mathcal{P}(\lambda p) \end{array}}$$

<u>Remarque</u> : nous pouvons déterminer la loi de $C - S$ en utilisant le même mode de raisonnement que celui utilisé pour déterminer celle de S.

– <u>Premier point</u>.

$$\forall i \in \mathbb{N}, \quad P(C=i) = \frac{\lambda^i}{i!}\ e^{-\lambda}$$

– <u>Second point</u>
  - Pour chaque tortue qui atteignent 100 ans cette année, la probabilité de mourir cette année vaut p.
  - Nous supposerons les décès des tortues ont indépendantes.

  Pour i tortues atteignant 100 ans cette année , le nombre $T = C - S$ de disparus l'année prochaine suit donc la loi Binomiale $\mathcal{B}(i, p)$.

$$\boxed{\forall i \in \mathbb{N},\ \forall j \in \{0,\ \cdots,\ i\}, \quad P_{C=i}(T=j) = \binom{i}{j}\ p^j\ q^{i-j}}$$

- <u>Loi de la variable $T = C - S$.</u>
  A priori, T est susceptible de prendre toute valeur entière naturelle.
  $\forall j \in \mathbb{N}, \quad P\left(T=j\right) = \sum_{i=0}^{+\infty} P_{C=i}\left(T=j\right) \times \left(C=i\right) = \sum_{i=j}^{+\infty} \binom{i}{j}\ p^j\ q^{i-j} \times \frac{\lambda^i}{i!}\ e^{-\lambda}$

$$P\left(T=j\right) = p^j\ e^{-\lambda}\ \sum_{i=j}^{+\infty} \frac{\lambda^i}{i!} \times \binom{i}{j}\quad q^{i-j}$$

  Posons $\ell = i - j$

$$\begin{aligned} P\left(T=j\right) &= p^j\ e^{-\lambda}\ \sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{\lambda^i}{i!} \times \frac{i!}{(i-j)!\ j!} \times\ q^\ell \\ &= \frac{p^j}{j!}\ e^{-\lambda}\ \sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{\ell+j}}{\ell!} \times\ q^\ell \\ &= \frac{(\lambda p)^j}{j!}\ e^{-\lambda}\ \sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{(\lambda q)^\ell}{\ell!} = \frac{(\lambda p)^j}{j!}\ e^{-\lambda}\ e^{\lambda q} \end{aligned}$$

  Par conséquent

$$\boxed{\begin{array}{c} \forall j \in \mathbb{N}, \quad P\left(T=j\right) = \dfrac{(\lambda p)^j}{j!}\ e^{-\lambda p} \\ T = C - S \text{ suit la loi de Poisson } \mathcal{P}\left(\lambda p\right) \end{array}}$$

  Nous constatons que

$$\boxed{\begin{array}{l} \forall j \in \mathbb{N},\ \mathcal{L}\left(C-S\right) = \mathcal{P}\left(\lambda p\right) = \mathcal{L}_{[S=j]}\left(C-S\right) \\ \text{Les variables } C-S \text{ et } S \text{ sont donc indépendantes} \end{array}}$$

Rédaction à trous pour vous entraîner

Dans un parc animalier, le nombre de tortues atteignant 100 ans au cours d'une année suit la loi de Poisson de paramètre λ. La probabilité pour une de ces tortues de mourir dans l'année vaut p.
– Soit C le nombre de tortues qui atteindront 100 ans cette année .
– Soit S le nombre de tortues qui atteindront 101 ans l'année prochaine.

1. Déterminer la loi de S sachant $C = n$.
2. Déterminer la loi de S.
3. Déterminer la probabilité qu'il y ait eu n centenaires l'année dernière, sachant que k tortues ont atteint 101 ans cette année.

Solution :

– Premier point.

$$\forall i \in \qquad , \quad P(C = i) =$$

– Second point
  - Pour chaque tortue qui atteignent 100 ans cette année, la probabilité de survivre cette année vaut .
  - Nous supposerons

  Pour i tortues atteignant 100 ans cette année , le nombre S de survivants l'année prochaine suit donc .

$$\forall i \in \quad , \forall j \in \qquad , \quad P_{C=i}(S = j) =$$

Loi du couple (C, S).

- $(C, S)(\Omega) =$
- Soit (i, j) un couple quelconque d'entiers tels que

$$P([C = i] \cap [S = j]) =$$

soit
$$P([C = i] \cap [S = j]) =$$

Conclusion

$$\boxed{\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2, \quad p_{i,j} = P([C = i] \cap [S = j]) = \begin{cases} & \text{si} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}$$

Loi de la variable S.

A priori, S est susceptible de prendre toute valeur entière naturelle.

$$\forall j \in \mathbb{N}, \quad P(S = j) = \sum_{i=0}^{+\infty} p_{i,j} =$$

$$P(S = j) =$$

Posons $\ell = i - j$

$$\begin{aligned} P(S = j) &= \\ &= \\ &= \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\boxed{\begin{array}{l} \forall j \in \mathbb{N}, \quad P(S=j) = \\ \qquad\qquad\qquad S \text{ suit la loi} \end{array}}$$

<u>Loi de la variable C sachant $S = k$</u>
Pour tout entier $n \geq k$

$$\begin{aligned} P_{S=k}(C=n) &= \\ &= \\ &= \end{aligned}$$

Notons alors que $P_{S=k}(C-k=\ell) = P_{S=k}(C=k+\ell)$

$$\boxed{\begin{array}{l} \quad \forall \ell \in \mathbb{N}, \quad P_{S=k}(C-k=\ell) = \\ \text{La loi conditionnelle de } C-k \text{ sachant } [S=k] \text{ est la loi} \end{array}}$$