Mathématiques - 2 BCPST 1&2 - Lycée Michel Montaigne

DM N°8 - A rendre le lundi 2 février 2015

« Algèbre linéaire – Réduction »

EXERCICE

Soit E l'espace vectoriel des fonctions réelles définies et continues sur $\mathbb{R}$.

1. Soit f une fonction quelconque de E.
   Montrer qu'il existe une unique fonction y de E telle que $\forall x \in \mathbb{R},\ y'(x) + y(x) = f(x) \quad \text{et} \quad y(0) = 0$.
2. Pour toutte fonction f de E, on désigne par $u(f)$ l'unique fonction y de E telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ y'(x) + y(x) = f(x) \quad \text{et} \quad y(0) = 0$$

   (a) Montrer que u est un endomorphisme injectif de E.

   (b) Cet endomorphisme est-il surjectif ?

   (c) Déterminer les valeurs propres et les espaces propres de cet endomorphisme u.

PROBLÈME

On note $\mathcal{B}$ la base du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}^4$ et id l'endomorphisme identité de $\mathbb{C}^4$.
On note $\mathcal{M}_4(\mathbb{C})$, respectivement $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$, l'ensemble des matrices carrées d'ordre 4 à cœfficients dans $\mathbb{C}$, respectivement dans $\mathbb{R}$.

On note I la matrice $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et J la matrice $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

On note g l'endomorphisme dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est J.

Pour tout quadruplet $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^4$, on note M_A la matrice $M_A = \displaystyle\sum_{k=1}^{4} a_k\, J^{k-1}$ et f_A l'endomorphisme de $\mathbb{C}^4$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est M_A.

On utilisera, sans chercher à le justifier, le fait que $\forall M \in \mathcal{M}_4(\mathbb{C}),\ M^0 = I$.

Première partie

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^4 = 1$.
2. On note Spec(g) l'ensemble des valeurs propres de g.

   (a) Montrer que Spec $(g) = \{1,\ i,\ -1,\ -i\}$

   (b) Déterminer une base de chaque sous-espace propre formée de vecteur(s) dont la première coorconnée vaut 1.

   (c) g est-il diagonalisable ?
3. On considère un quadruplet $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^4$.

   (a) Calculer les cœfficients de M_A.

   (b) Montrer que f_A est combinaison linéaire de id, g, $g \circ g$ et $g \circ g \circ g$.

   (c) Calculer l'image par f_A des vecteurs propres déterminés au 2b.

(d) En déduire que l'endomorphisme f_A est diagonlisable et donner une matrice diagonale à laquelle M_A est semblable.

4. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on note $M(z)$ la matrice $M(z) = \begin{pmatrix} z & 1 & 1 & 1 \\ 1 & z & 1 & 1 \\ 1 & 1 & z & 1 \\ 1 & 1 & 1 & z \end{pmatrix}$.
   (a) Déterminer les valeurs propres de $M(z)$.
   (b) Déterminer l'ensemble des nombres complexes pour lesquelles la matrice $M(z)$ est inversible.
   (c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $k \in \mathbb{N}^*$ et $z \in \mathbb{C}$. Calculer $[M(1)]^k$ et $\big(M(z) - M(1)\big)^k$ puis, en remarquant que $M(z) = \big(M(z) - M(1)\big) + M(1)$, en déduire une expression de $[M(1)]^n$ à l'aide de z, n, $M(1)$ et I.
5. Application.
   (a) Écrire un algorithme fournissant le produit de deux matrices appartenant à $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$. Combien d'opérations (additions et multiplications) sont-elles réalisées ?
   (b) Écrire un algorithme fournissant la puissance n-ième d'une matrice de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ utilisant l'algorithme précédent. Combien d'opérations (additions et multiplications) sont-elles réalisées ?
   (c) Soit z un réel, écrire un algorithme fournissant la puissance n-ième de $M(z)$ en utilisant la formule obtenue au 4c. Combien d'opérations (additions et multiplications) sont-elles réalisées ? *(On comptera $n-1$ produits si l'on effectue z^n).*

Deuxième partie

On note E l'ensemble des fonctions polynômiales de degré inférieur ou égal à 3.
On note ε_0, ε_1, ε_2, ε_3 les fonctions polynômiales suivantes :

$$\varepsilon_0, : x \mapsto 1, \quad \varepsilon_1, : x \mapsto x, \quad \varepsilon_2, : x \mapsto x^2, \quad \varepsilon_3, : x \mapsto x^3$$

On rappelle que $\mathcal{B}_1 = (\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est une base du $\mathbb{R}$-espace vectoriel E.
Pour toute fonction polynômiale P, on note $h(P)$ l'application

$$x \mapsto (1 - x^2)\left(P'(0) - \frac{P'''(0)}{6} + x\left(\frac{P''(0)}{2} - P(0)\right)\right)$$

1. Montrer que h est un endomorphisme de E.
2. Déterminer la matrice de h dans la base $\mathcal{B}_1$.
3. Déterminer l'ensemble des valeurs propres réelles de h.
4. Déterminer une base de l'image et du noyau de h.

Corrigé du devoir maison n^o 8

EXERCICE

1. Soit $f \in E$ donnée ; déterminer une fonction y vérifiant $\forall x \in \mathbb{R},\ y'(x) + y(x) = f(x)$ et $y(0) = 0$ $(\star)$ revient à résoudre une équation différentielle linéaire du premier ordre à cœfficients constants avec condition particulière. Une solution de cette équation peut se chercher sous la forme $x \mapsto \alpha(x)\, e^{-x}$ où α est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

   Par identification on obtient : $\alpha'(x)\, e^{-x} = f(x)$ ou encore $\alpha'(x) = e^x\, f(x)$. La fonction $x \mapsto e^x\, f(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc admet des primitives. Ainsi il existe des fonctions de E solutions de $(\star)$. L'unicité résulte d'un théorème de cours : si y_1 et y_2 sont 2 solutions, alors $\forall x \in \mathbb{R},\ \big(y_1'(x) - y_2'(x)\big)(x) + \big(y_1(x) - y_2(x)\big)(x) = 0$ et $y_1(0) - y_2(0) = 0$; $y_1 - y_2$ est de la forme $x \mapsto K\, e^{-x}$ où K est un réel, et comme $y_1 - y_2$ s'annule en 0, on déduit $K = 0$ d'ou $y_1 = y_2$ sur $\mathbb{R}$.

2. L'unicité de $u(f)$ pour $f \in E$ donnée entraine que l'on peut effectivement définir l'application u sur E.

   (a) — Linéarité de u : soient f et g deux fonctions de E et $\lambda \in \mathbb{R}$
   $\forall x \in \mathbb{R}, \lambda\, \big(u(f)\big)'(x) + \lambda\, u(f)(x) = \lambda\, f(x)$ et $\forall x \in \mathbb{R}, \big(u(g)\big)'(x) + u(g)(x) = g(x)$
   Donc $\forall x \in \mathbb{R}, \Big(\lambda\, u(f) + u(g)\Big)'(x) + \Big(\lambda\, u(f) + u(g)\Big)(x) = \lambda\, f(x) + g(x)$, de plus $u\big(\lambda\, f + g\big)(0) = 0$ et $\lambda\, u(f)(0) + u(g)(0) = 0$. Ainsi $u\big(\lambda\, f + g\big) = \lambda\, u(f) + u(g)$.

   — Injectivité de u : soit $f \in E,\ f \in \ker(u) \iff u(f) = 0$ (fonction nulle sur $\mathbb{R}$) c'est à dire l'équation différentielle $(\star)$ a comme unique solution sur $\mathbb{R}$ la fonction nulle. Or, d'après la première question, une fonction solution est de la forme $x \mapsto \alpha(x)\, e^{-x}$ avec α une primitive de $x \mapsto e^x\, f(x)$.
   Comme l'exponentielle ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, si la seule solution est la fonction nulle, c'est que la fonction α est la fonction nulle, donc sa dérivée aussi ; ainsi $\forall x \in \mathbb{R},\ e^x\, f(x) = 0$ et en multipliant par e^{-x} : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0$. On a bien montré que $\Big(\ u(f) = 0\Big) \Rightarrow \Big(\ f = 0\Big)$ c'est à dire $\mathrm{Ker}(u) = \{0\}$.

   (b) L'expression de $u(f)$ montre que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, or il existe dans E des fonctions non dérivables (la valeur absolue par exemple) qui n'ont donc pas d'antécédent par u ; ainsi $\boxed{u \text{ n'est pas surjectif}}$

   (c) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, λ est une valeur propre de u s'il existe $f \in E$ non nulle telle que $u(f) = \lambda\, f$ c'est à dire $\forall x \in \mathbb{R},\ \lambda\, f'(x) + \lambda\, f(x) = f(x)$ et $f(0) = 0$
   — Si $\lambda = 0$, on obtient $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0$, donc 0 n'est pas valeur propre.
   — Sinon on a une équation différentielle linéaire sans second membre à cœfficients constants :
   $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) + \dfrac{\lambda - 1}{\lambda}\, f(x) = 0$ et $f(0) = 0$ La solution est $f\ : x \mapsto K\, e^{\frac{1-\lambda}{\lambda} x}$ avec $f(0) = K = 0$; donc $\boxed{u \text{ n'a aucune valeur propre ni espace propre}}$
   <u>Variante :</u> Si on remplace la condition par $y(0) = f(0)$, on obtient $\lambda = 1$ et $f\ : x \mapsto f(0)$ est une fonction constante. Donc u admet une unique valeur propre, 1 et E_1 est l'ensemble des fonctions constantes sur $\mathbb{R}$.

PROBLÈME

Première partie

1. $z = 0$ n'est pas solution de l'équation, on peut donc poser $z = r\, e^{i\theta}$ avec $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$. On obtient : $r^4\, e^{i\,4\,\theta} = 1\, e^{i\,0}$ d'où $r = 1$ et $\theta = 0 + \dfrac{2\,k\,\pi}{4}$, $k \in \mathbb{Z}$. Pour obtenir toutes les solutions, il suffit de choisir 4 valeurs consécutives de k, par exemple de 0 à 3. Finalement l'ensemble des solutions est $\{1,\ i,\ -1,\ -i\}$.
   <u>Remarque</u> : on pouvait aussi écrire $z^4 = 1 \iff z^4 - 1 = 0 = (z^2 - 1)\,(z^2 + 1) = (z - 1)\,(z + 1)\,(z - i)\,(z + i)$.
   $$\boxed{z^4 = 1 \iff z \in \{1,\ i,\ -1,\ -i\}}$$

2. (a) $\lambda \in \mathbb{C}\ \in$Spec$(g)$ si et seulement si $g - \lambda\,\mathrm{id}$ n'est pas injectif, ou encore si $J - \lambda\, I$ est de rang inférieur ou égal à 3. Soit $\lambda \neq 0$:

$$J-\lambda I = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ L_4 \leftarrow \lambda L_4 + L_1 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -\lambda^2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ L_4 \leftarrow \lambda L_4 + L_2 \end{matrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\lambda^3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ L_4 \leftarrow \lambda L_4 + L_3 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\lambda^4 \end{pmatrix}.$$

Donc pour $\lambda \neq 0$, $J-\lambda I$ est de rang 4 (colonnes échelonnées) si et seulement si $1-\lambda^4 \neq 0$; pour $\lambda = 0$ J est de rang 4 (il suffit de permuter L_1 et L_4 pour retrouver la matrice I).
Ainsi $\mathrm{rg}(J-\lambda I) < 4 \iff \lambda \in \{1,\, i,\, -1,\, -i\}$

$$\boxed{\mathrm{Spec}(J) = \mathrm{Spec}(g) = \{1,\, i,\, -1,\, -i\}}$$

(b) Pour $\lambda \in \{1,\, i,\, -1,\, -i\}$ et $X = {}^t(x, y, z, t)$ on résout $(J - \lambda I)\, X = 0$

- $\underline{\lambda = 1}$ $\left\{\begin{array}{rcl} -x + y & = & 0 \\ -y + z & = & 0 \\ -z + t & = & 0 \end{array}\right. \iff x = y = z = t$ $\qquad \boxed{E_1 = \mathrm{Vect}\langle(1,1,1,1)\rangle}$
- $\underline{\lambda = i}$ $\left\{\begin{array}{rcl} -ix + y & = & 0 \\ -iy + z & = & 0 \\ -iz + t & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} y & = & ix \\ z & = & -x \\ t & = & -ix \end{array}\right.$ $\qquad \boxed{E_i = \mathrm{Vect}\langle(1,i,-1,-i)\rangle}$
- $\underline{\lambda = -1}$ $\left\{\begin{array}{rcl} x + y & = & 0 \\ y + z & = & 0 \\ z + t & = & 0 \end{array}\right. \iff y = t = -x = -z$ $\qquad \boxed{E_{-1} = \mathrm{Vect}\langle(1,-1,1,-1)\rangle}$
- $\underline{\lambda = -i}$ $\left\{\begin{array}{rcl} ix + y & = & 0 \\ iy + z & = & 0 \\ iz + t & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} y & = & -ix \\ z & = & -x \\ t & = & ix \end{array}\right.$ $\qquad \boxed{E_{-i} = \mathrm{Vect}\langle(1,-i,-1,i)\rangle}$

(c) g admet 4 valeurs propres distinctes, donc $\boxed{g \text{ est diagonalisable}}$

3. (a) $J^0 = I$, $J^2 = \begin{pmatrix} 0&0&1&0 \\ 0&0&0&1 \\ 1&0&0&0 \\ 0&1&0&0 \end{pmatrix}$, $J^3 = \begin{pmatrix} 0&0&0&1 \\ 1&0&0&0 \\ 0&1&0&0 \\ 0&0&1&0 \end{pmatrix}$, donc $M_A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_4 & a_1 & a_2 & a_3 \\ a_3 & a_4 & a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 & a_4 & a_1 \end{pmatrix}$

(b) M_A est combinaison linéaire de I, J, J^2 et J^3 ; or M_A est la matrice de l'endomorphisme f_A dans la base $\mathcal{B}$, J est la matrice de g dans la base $\mathcal{B}$, de même pour J^k, $1 \leqslant k \leqslant 3$. Ainsi f_A est combinaison linéaire (avec les mêmes cœfficients que M_A) de id, g, $g \circ g$ et $g \circ g \circ g$.

(c) Notons ε_1, ε_2, ε_3, ε_4 les vecteurs de base déterminés précédemment de E_1, E_i, E_{-1}, E_{-i} respectivement.
$g(\varepsilon_1) = g \circ g(\varepsilon_1) = g \circ g \circ g(\varepsilon_1) = \varepsilon_1$, $\quad g(\varepsilon_2) = i\,\varepsilon_2$, $g \circ g(\varepsilon_2) = -\varepsilon_2$, $g \circ g \circ g(\varepsilon_2) = -i\,\varepsilon_2$
$g(\varepsilon_3) = -\varepsilon_3$, $g \circ g(\varepsilon_3) = \varepsilon_3$, $g \circ g \circ g(\varepsilon_3) = -\varepsilon_3$ et $g(\varepsilon_4) = -i\,\varepsilon_4$, $g \circ g(\varepsilon_4) = -\varepsilon_4$, $g \circ g \circ g(\varepsilon_4) = i\,\varepsilon_4$
$f_A(\varepsilon_1) = a_1\,\varepsilon_1 + a_2\, g(\varepsilon_1) + a_3\, g \circ g(\varepsilon_1) + a_4\, g \circ g \circ g(\varepsilon_1) = (a_1 + a_2 + a_3 + a_4)\,\varepsilon_1$
$f_A(\varepsilon_2) = a_1\,\varepsilon_2 + a_2\, g(\varepsilon_2) + a_3\, g \circ g(\varepsilon_2) + a_4\, g \circ g \circ g(\varepsilon_2) = (a_1 + i\,a_2 - a_3 - i\,a_4)\,\varepsilon_2$
$f_A(\varepsilon_3) = a_1\,\varepsilon_3 + a_2\, g(\varepsilon_3) + a_3\, g \circ g(\varepsilon_3) + a_4\, g \circ g \circ g(\varepsilon_3) = (a_1 - a_2 + a_3 - a_4)\,\varepsilon_3$
$f_A(\varepsilon_4) = a_1\,\varepsilon_4 + a_2\, g(\varepsilon_4) + a_3\, g \circ g(\varepsilon_4) + a_4\, g \circ g \circ g(\varepsilon_4) = (a_1 - i\,a_2 - a_3 + i\,a_4)\,\varepsilon_4$

(d) La famille $\big(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4\big)$ est une base de vecteurs propres de g, on constate qu'elle est aussi une base de vecteurs propres de f_A, les valeurs propres associées étant $a_1 + a_2 + a_3 + a_4$, $a_1 + i\,a_2 - a_3 - i\,a_4$, $a_1 - a_2 + a_3 - a_4$ et $a_1 - i\,a_2 - a_3 + i\,a_4$. Dans cette base, la matrice de f_A est donc semblable à

$$\begin{pmatrix} a_1 + a_2 + a_3 + a_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 + ia_2 - a_3 - ia_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 - a_2 + a_3 - a_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_1 - ia_2 - a_3 + ia_4 \end{pmatrix}$$

4. (a) On remarque que $M(z) = M_A$ avec $A = \begin{pmatrix} z \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, donc d'après la question 3d, ses valeurs propres sont $z+3$ et $z-1$; $z-1$ est valeur propre triple.

(b) $M(z)$ est inversible si 0 n'est pas valeur propre,d'où $\boxed{M(z) \text{ est inversible } \iff z \notin \{1,-3\}}$

(c) $M(1)^2 = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix} = 4\,M(1)$, donc par récurrence $\forall k \geqslant 1,\ M(1)^k = 4^{k-1}\,M(1)$

$M(z)-M(1) = (z-1)\,I$, donc $\big(M(z)-M(1)\big)^k = (z-1)^k\,I$; et comme $M(z)-M(1)$ et $M(1)$ commutent, on déduit :

$[M(z)]^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} M(1)^k \Big(M(z)-M(1)\Big)^{n-k} = I \times \Big(M(z)-M(1)\Big)^n + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 4^{k-1}\,M(1)\,(z-1)^{n-k}\,I$

$= (z-1)^n\,I + \dfrac{1}{4}\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 4^k\,(z-1)^{n-k}\right) M(1) = (z-1)^n\,I + \dfrac{1}{4}\Big((z+3)^n - (z-1)^n\Big)\,M(1)$

$$\boxed{[M(z)]^n = \frac{(z+3)^n}{4}\,M(1) + (z-1)^n\Big(I - \frac{1}{4}\,M(1)\Big)}$$

5. Algorithmes en Scilab :

(a)
```
function P=produit(A,B)     //ici n=p=m=q=4
    [n,p]=size(A); [m,q]=size(B);
if (n~=p)|(m~=q)|(n~=m) then
    disp(error('erreur de format'))
else
    for i=1:n do
        for j=1:n do
            P(i,j)=A(i,:)*B(:,j)
        end
    end
end
endfunction
```
Pour chaque cœfficient du produit (16 en tout) il faut 4 produits et 3 additions, soit au total 48 additions et 64 produits.

(b)
```
function An=puissance(A,n)
    An=A
    for k=1:n-1 do
        An=produit(An,A)
    end
endfunction
```
On effectue $n-1$ produits matriciels, soit $48\,n$ additions et $64\,n$ produits.

(c)
```
function Mnz=puissanceZ(z,n,p) //ici p=4
    M1=ones(p,p); I=eye(p,p);
    Mnz=0.25*(z+3)^n*M1+(z-1)^n*(I-0.25*M1)
endfunction
```
On a une somme (donc une addition) de deux expressions :
Pour la partie gauche : une addition $(z+3)$ puis n produits (puissance n et produit par $0,25$) et enfin 16 produits (multiplication par les cœfficients de $M(1)$).
Pour la partie droite : 16 produits ($-0,25$ par les cœfficients de $M(1)$), 16 additions (somme des deux matrices), puis 1 addition $(z-1)$ et $16+(n-1)$ produits.
Donc au total, 19 additions et $2\,n+47$ produits.

Deuxième partie

1. Soit P un élément de E, c'est à dire une fonction polynômiale de degré inférieur ou égal à 3, $x \longmapsto P'(0) - \dfrac{P'''(0)}{6} + x\left(\dfrac{P''(0)}{2} - P(0)\right)$ est une fonction polynômiale de degré inférieur ou égal à 1, donc $h(P)$ est de degré inférieur ou égal à 3, et h est bien à valeurs dans E.
   Linéarité de h : Soient P et Q deux éléments de E et $\lambda \in \mathbb{R}$;
   $\forall x \in \mathbb{R},\ h(\lambda\, P + Q)(x) = (1 - x^2)\left((\lambda\, P + Q)'(0) - \dfrac{\lambda\, P + Q)'''(0)}{6} + x\Big(\dfrac{(\lambda\, P + Q)''(0)}{2} - (\lambda\, P + Q)(0)\Big)\right)$
   $= \lambda\,(1 - x^2)\left(P'(0) - \dfrac{P'''(0)}{6} + x\Big(\dfrac{P''(0)}{2} - P(0)\Big)\right) + (1 - x^2)\left(Q'(0) - \dfrac{Q'''(0)}{6} + x\Big(\dfrac{Q''(0)}{2} - Q(0)\Big)\right)$
   $= \lambda\, h(P)(x) + h(Q)(x)$; l'égalité est vérifiée pour tout x réel, donc h est linéaire.
2. $\forall x \in \mathbb{R},\ h(\varepsilon_0)(x) = -x\,(1 - x^2)$ donc $h(\varepsilon_0) = \varepsilon_3 - \varepsilon_1$
   $\forall x \in \mathbb{R},\ h(\varepsilon_1)(x) = (1 - x^2)$ donc $h(\varepsilon_1) = \varepsilon_0 - \varepsilon_2$
   $\forall x \in \mathbb{R},\ h(\varepsilon_2)(x) = x\,(1 - x^2)$ donc $h(\varepsilon_2) = \varepsilon_1 - \varepsilon_3$
   $\forall x \in \mathbb{R},\ h(\varepsilon_3)(x) = -\,(1 - x^2)$ donc $h(\varepsilon_3) = \varepsilon_2 - \varepsilon_0$ ce qui donne pour la matrice de h dans $\mathcal{B}_1$:
   $$H = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$
3. On remarque que H est de rang 2, puisque les colonnes 1 et 3 sont proportionnelles, ainsi que les colonnes 2 et 4 ; ainsi 0 est valeur propre avec un espace propre associé de dimension 2 : $\ker(h) = \mathrm{Vect}\langle \varepsilon_1 + \varepsilon_3, \varepsilon_2 + \varepsilon_4\rangle$
   Pour $\lambda \neq 0$, on calcule le rang de $H - \lambda\, I$:
   $$H - \lambda\, I = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 & -1 \\ -1 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -\lambda \end{pmatrix} \underset{\substack{L_2 \leftrightarrow L_3 \\ L_1 \leftrightarrow L_4}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -\lambda \\ 0 & -1 & -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda & 1 & 0 \\ -\lambda & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \underset{\substack{L_3 \leftarrow L_1 + L_3 \\ L_4 \leftarrow L_4 + \lambda\, L_1}}{\sim}$$
   $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -\lambda \\ 0 & -1 & -\lambda & 1 \\ 0 & -\lambda & 0 & -\lambda \\ 0 & 1 & -\lambda & -\lambda^2 - 1 \end{pmatrix} \underset{\substack{L_3 \leftarrow L_3 - \lambda\, L_2 \\ L_4 \leftarrow L_2 + L_4}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -\lambda \\ 0 & -1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda^2 & -2\lambda \\ 0 & 0 & -2\lambda & -\lambda^2 \end{pmatrix} \underset{L_4 \leftarrow \lambda\, L_4 + 2\, L_3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -\lambda \\ 0 & -1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda^2 & -2\lambda \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda^3 - 4\lambda \end{pmatrix}$$
   $-\lambda^3 - A\,\lambda = -\lambda\,(\lambda^2 + 4)$ On constate que pour $\lambda \neq 0$, la matrice est de rang 4, donc il n'y a pas d'autre valeur propre réelle que 0. *Par contre il y a aussi deux valeurs propres complexes conjuguées : $2\,i$ et $-2\,i$.*
4. Une base du noyau a déjà été trouvée à la question précédente : $\langle \varepsilon_1 + \varepsilon_3,\ \varepsilon_2 + \varepsilon_4\rangle$; pour une base de l'image –qui est de dimension 2– il suffit de considérer deux vecteurs colonnes non colinéaires de H, par exemple $h(\varepsilon_1) = -\varepsilon_2 + \varepsilon_4$ et $h(\varepsilon_2) = \varepsilon_1 - \varepsilon_3$.
   $$\boxed{\begin{array}{l} \mathrm{Ker}(h) = \mathrm{Vect}\langle \varepsilon_1 + \varepsilon_3,\ \varepsilon_2 + \varepsilon_4\rangle \\ \mathrm{Im}(h) = \mathrm{Vect}\langle -\varepsilon_2 + \varepsilon_4,\ \varepsilon_1 - \varepsilon_3\rangle \end{array}}$$
   Ce n'est pas demandé dans l'exercice, mais on peut alors écrire la matrice H' de h dans la base
   $$\mathcal{B}' = \langle \varepsilon_1 + \varepsilon_3,\ \varepsilon_2 + \varepsilon_4,\ -\varepsilon_2 + \varepsilon_4,\ \varepsilon_1 - \varepsilon_3\rangle : H' = \mathscr{M}at(h, \mathcal{B}') = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$