

Mathématiques - 2 BCPST 1&2 - Lycée Michel Montaigne

DM N°6 - A rendre le mercredi 3 décembre 2014

« Le tournoi de Paintball »

On considère un tournoi de Paintball entre trois joueurs A, B et C, qui se déroule en une succession d'affrontements de la façon suivante, jusqu'à élimination d'au moins deux des trois joueurs :

- ▷ Tous les tirs du tournoi sont des épreuves de Bernoulli mutuellement indépendantes.
- ▷ Lorsque le joueur A tire, la probabilité pour qu'il atteigne son adversaire est égale à $2/3$.
- ▷ Lorsque le joueur B tire, la probabilité pour qu'il atteigne son adversaire est égale à $1/2$.
- ▷ Lorsque le joueur C tire, la probabilité pour qu'il atteigne son adversaire est égale à $1/3$.
- ▷ Lorsque l'un des joueurs est touché, il est définitivement éliminé des affrontements suivants.
- ▷ À chaque affrontement, les joueurs non encore éliminés tirent simultanément et chacun d'eux vise le plus dangereux de ses rivaux non encore éliminés (ainsi, lors du premier affrontement, A vise B tandis que B et C visent A).

• Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on considère les événements suivants :

- ABC_n : « À l'issue du $n^{\text{ième}}$ affrontement, A, B et C ne sont pas encore éliminés. »
 - AB_n : « À l'issue du $n^{\text{ième}}$ affrontement, seuls A et B ne sont pas encore éliminés. »
(on définit de façon analogue BC_n et AC_n)
 - A_n : « À l'issue du $n^{\text{ième}}$ affrontement, seul A n'est pas encore éliminé. »
(on définit de façon analogue B_n et C_n)
 - O_n : « À l'issue du $n^{\text{ième}}$ affrontement, les trois joueurs sont éliminés. »
- ABC_0 est l'événement certain et $AB_0, AC_0, BC_0, A_0, B_0, C_0$ et O_0 l'événement impossible.

Le premier affrontement

1. On désigne par R_A (respectivement R_B et R_C) l'événement : « A (respectivement B et C) réussit son premier tir. »
 - (a) Calculer $P(R_B \cup R_C)$.
 - (b) Montrer que la probabilité pour qu'au premier affrontement, « A rate son tir » et « B ou C réussissent leur tir » est égale à $\frac{2}{9}$.
 - (c) Déterminer de même la probabilité pour qu'au premier affrontement, « A réussisse son tir » et « B ou C réussissent leur tir. »

2. Informatique

- (a) Écrire en Python le script d'une fonction `X_TIRE_SUR_Y` dont le seul argument d'entrée est `p` qui permette de simuler le tir du joueur X sur un joueur Y dont la probabilité de réussite est `p` de sorte et retourne une variable Booléenne indiquant si ce tir est réussi ou non.
Par exemple, l'instruction `R=X_TIRE_SUR_Y(0.5)` affecte la valeur aléatoire `True` à la variable `R` avec la probabilité $\frac{1}{2}$.
- (b) Écrire en Python le script d'une fonction `AFFRONTEMENT_XYZ` dont les arguments d'entrée sont `p, q, r` qui permette de simuler l'affrontement entre trois joueurs X, Y, Z dont les probabilités pour qu'ils atteignent leur adversaire valent respectivement `p, q, r` et retourne trois variables Booléennes `X, Y, Z` indiquant si les joueurs X, Y, Z ont survécu.
Par exemple, l'instruction `[A,B,C]=AFFRONTEMENT_XYZ(2/3,1/2,1/3)` permet de simuler le premier affrontement.

Probabilités de transition

3. (a) Montrer que $(ABC_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite décroissante d'événements.
En est-il de même des suites $(BC_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(AC_n)_{n \in \mathbb{N}}$

- (b) Expliquer pourquoi C ne peut pas être le premier éliminé. En déduire $P(AB_n)$.
- (c) Justifier $P_{ABC_n}(ABC_{n+1}) = \frac{1}{9}$.
- (d) Calculer $P_{ABC_n}(BC_{n+1})$ à l'aide de la question 1. puis donner $P_{ABC_n}(AC_{n+1})$.
- (e) Calculer $P_{ABC_n}(A_{n+1})$, $P_{ABC_n}(B_{n+1})$ et $P_{ABC_n}(C_{n+1})$.
- (f) Calculer $P_{AC_n}(A_{n+1})$, $P_{AC_n}(C_{n+1})$, $P_{AC_n}(AC_{n+1})$, $P_{BC_n}(B_{n+1})$, $P_{BC_n}(C_{n+1})$, et $P_{BC_n}(BC_{n+1})$.
- (g) Calculer $P_{ABC_n}(O_{n+1})$, $P_{BC_n}(O_{n+1})$ et $P_{AC_n}(O_{n+1})$.

Résumé des résultats obtenus

4. Pour mieux apprécier la cohérence des résultats obtenus, nous vous proposons de résumer les résultats obtenus dans le tableau suivant

$V =$	O_{n+1}	A_{n+1}	B_{n+1}	C_{n+1}	AB_{n+1}	BC_{n+1}	AC_{n+1}	ABC_{n+1}
$P_{ABC_n}(V) =$
$P_{AC_n}(V) =$
$P_{BC_n}(V) =$

Suite du tournoi

5. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note U_n l'événement : « Le tournoi n'est pas terminé à l'issue du $n^{\text{ième}}$ affrontement. ».

- (a) Calculer $P(U_1)$.
- (b) Soit $n \geq 2$. Calculer $P(ABC_1 \cap ABC_2 \cap \dots \cap ABC_n)$ (on pourra utiliser la question 2.b). En déduire que $P(ABC_n) = \left(\frac{1}{9}\right)^n$.
- (c) Pour $n \geq 2$, on pose :

$$E_{0,n} = AC_1 \cap AC_2 \cap \dots \cap AC_n$$

$$\forall k \in 1, n-1, E_{k,n} = ABC_1 \cap ABC_2 \cap \dots \cap ABC_k \cap AC_{k+1} \cap AC_{k+2} \cap \dots \cap AC_n$$

- i. Peut-on simplifier l'expression de $E_{k,n}$?
- ii. Calculer $P(E_{k,n})$ pour tout $k \in 0, n-1$.
- iii. Exprimer AC_n en fonction des $(E_{k,n})_{0 \leq k \leq n-1}$.
- iv. En déduire $P(AC_n)$ pour $n \geq 2$.
- (d) On pose maintenant, pour $n \geq 2$:

$$F_{0,n} = BC_1 \cap BC_2 \cap \dots \cap BC_n$$

$$\forall k \in 1, n-1, F_{k,n} = ABC_1 \cap ABC_2 \cap \dots \cap ABC_k \cap BC_{k+1} \cap BC_{k+2} \cap \dots \cap BC_n$$

- i. Calculer $P(F_{k,n})$ pour $k \in 0, n-1$.
- ii. En exprimant BC_n en fonction des $(F_{k,n})_{0 \leq k \leq n-1}$, déterminer $P(BC_n)$ pour tout $n \geq 2$.
- (e) Exprimer U_n en fonction des événements ABC_n , AB_n , AC_n et BC_n . En déduire que :

$$P(U_n) = \left(\frac{1}{3}\right)^n + 2 \left(\left(\frac{2}{9}\right)^n - \left(\frac{1}{9}\right)^n \right)$$

6. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note T_n l'événement : « Le tournoi de termine à l'issue du $n^{\text{ième}}$ affrontement. ».

- (a) Calculer $P(T_1)$.
- (b) Pour tout $n \geq 2$, exprimer T_n en fonction de U_{n-1} et de U_n .

(c) En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, P(T_n) = 2 \left(\frac{1}{3}\right)^n + 7 \left(\frac{2}{9}\right)^n - 16 \left(\frac{1}{9}\right)^n$$

7. Probabilité de victoire de A

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $G_A(n)$ l'événement : « A gagne le tournoi à l'issue du $n^{\text{ième}}$ affrontement ».

(a) Calculer $P(G_A(1))$.

(b) Exprimer $G_A(n)$ en fonction de AC_{n-1} et A_n . En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, P(G_A(n)) = 4 \left(\frac{2}{9}\right)^n \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)$$

(c) Calculer, à l'aide de la question 5.b, la probabilité que A gagne le tournoi.

8. Probabilités de victoire de B et C

(a) En s'inspirant de ce qui précède, calculer la probabilité que B gagne le tournoi.

(b) Déterminer enfin la probabilité que C gagne le tournoi.

9. Informatique

(a) Modifier légèrement le script de votre fonction `AFFRONTEMENT_XYZ` de sorte que l'instruction

- `[X,Y,Z]=AFFRONTEMENT_XYZ(0,q,r)` simule un affrontement auquel ne participerait pas X.
- `[X,Y,Z]=AFFRONTEMENT_XYZ(p,0,r)` simule un affrontement auquel ne participerait pas Y.
- `[X,Y,Z]=AFFRONTEMENT_XYZ(p,q,0)` simule un affrontement auquel ne participerait pas Z.

(b) Écrire en Python le script d'une fonction `TOURNOI_XYZ` dont les arguments d'entrée sont `p,q,r` qui permette de simuler un tournoi entre trois joueurs X, Y, Z dont les probabilités pour qu'ils atteignent leur adversaire valent respectivement `p,q,r` et retourne trois variables Booléennes X, Y, Z indiquant si ces joueurs ont gagné.

Par exemple, l'instruction `[A,B,C]=AFFRONTEMENT_XYZ(2/3,1/2,1/3)` permet de simuler le premier affrontement.

10. Durée du tournoi.

On désigne par durée du tournoi : le nombre d'affrontements auxquels ce tournoi a donné lieu.

(a) Montrer que Z est une variable aléatoire presque sûrement finie.

Vérifier que son espérance et sa variance valent respectivement $\frac{51}{28}$ et $\frac{51}{56}$.

Que vaut l'écart-type de Z ?

(b) Informatique

Écrire à l'aide de la fonction `TOURNOI_XYZ` un programme qui permette de vérifier les valeurs d'espérance et de variance obtenues précédemment.