Mathématiques - 2 BCPST 1&2 - Lycée Michel Montaigne

DM N°9 - A rendre le lundi 6 Janvier 2014

Important ! Vous êtes priés de rédiger ces exercices sur <u>une seule feuille double</u> *à raison d'un exercice par page. L'ensemble de votre travail ne doit donc excéder quatre pages !*

Exercice 1 : Etude d'une suite

Pour $n \geq 2$, on considère l'équation (E_n) sur $[0, +\infty[$:

$$(E_n) \quad 1 + \ln(x + n) = x$$

1. Pour $n \geq 2$ fixé, montrer que cette équation admet une solution unique sur $[0, +\infty[$. On note u_n cette solution.

2. Montrer que la suite (u_n) est croissante.

3. Montrer qu'à partir d'un certain rang, pour $n \geq n_0$, on a

$$\ln(n) \leq u_n \leq n$$

4. Donner un équivalent simple de (u_n).

Exercice 2 : Le sauteur en hauteur

Un sauteur en hauteur participe à un concours. La barre est successivement mise à des hauteurs numérotées $1,\ 2, \cdots, n, \cdots$ et l'on fait les hypothèses suivantes :
- Le sauteur est éliminé dès l'instant où il ne franchit pas la hauteur.
- Si le sauteur n'a pas raté avant la $n^{\text{ème}}$ hauteur, la probabilité pour qu'il franchisse cette hauteur n°n vaut $1/n$.

On noterons

$$X = \begin{cases} \text{Le numéro du dernier essai réussi si le sauteur finit par rater} \\ \text{0 si le sauteur ne rate jamais} \end{cases}$$

1. Calculer pour $n \in \mathbb{N}^*$ la probabilité $\mathrm{P}(X = n)$. En déduire $\mathrm{P}(X = 0)$

2. Déterminer si elles existent l'espérance et la variance de X.

Exercice 3 : Etude d'une famille de variables aléatoires discrètes

Soit $(X_k)_{k \in [\![0,n]\!]}$ une famille de variables aléatoires indépendantes dont la loi est définie par :

$$\forall k \in [\![0, n]\!],\ X_k(\Omega) = \{-1, 1\}\ ,\ P(X_k = -1) = \frac{1}{2} \text{ et } P(X_k = 1) = \frac{1}{2}$$

On pose $Z_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k X_{k-1}$ et pour $k \in [\![1, n]\!]$: $Y_k = (X_k - X_{k-1})^2$.

1. Exprimer Z_n en fonction des Y_k.

2. Déterminer la loi des variables Y_k.

3. Déterminer $E(Z_n)$ et $V(Z_n)$.

Exercice 4 : Mais où dormir ce soir ?

n clients se répartissent au hasard dans trois hôtels H_1, H_2 et H_3.
On désigne par X_k la variable aléatoire égale au nombre de clients de l'hôtel H_k $(k \in \{1, 2, 3\})$.

1. Déterminer la loi de X_k.

2. Déterminer la loi de $X_1 + X_2$.

3. Déterminer la covariance $\operatorname{cov}(X_1, X_2)$, puis le coefficient de corrélation $\rho(X_1, X_2)$.