Correction du devoir n°2

EXERCICE

1. Soit $x\in\mathbb{R}$, $T_a(s)(x)=\dfrac{1}{2\,a}\displaystyle\int_{x-a}^{x+a}\sin\left(\dfrac{\pi\,t}{a}\right)\mathrm{d}t=\dfrac{1}{2\,a}\times\dfrac{a}{\pi}\left[-\cos\left(\dfrac{\pi\,t}{a}\right)\right]_{x-a}^{x+a}$
$$=\frac{1}{2\,\pi}\left(\cos\left(\frac{\pi\,x}{a}-\pi\right)\cos\left(\frac{\pi\,x}{a}+\pi\right)\right)=0$$
$$\boxed{T_a(s)\text{ est la fonction nulle.}}$$

2. (a) Par hypothèse, f est continue sur $\mathbb{R}$, donc admet des primitives sur $\mathbb{R}$. Soit F une primitive de f, F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ (de dérivée f) donc $x\longmapsto\dfrac{1}{2\,a}\displaystyle\int_{x-a}^{x+a}f\,(t)\ \mathrm{d}t=\dfrac{1}{2\,a}\Big(F(x+a)-F(x-a)\Big)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

   (b) Soit $f\in E$ telle que $T_a(f)$ est constante sur $\mathbb{R}$; $T_a(f)$ étant de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, on a :
   $T_a(f)$ est une fonction constante $\iff$ $\big(T_a(f)\big)'$ est la fonction nulle $\iff$ $\forall x\in\mathbb{R},\ \big(T_a(f)\big)'(x)=\ 0.$
   Or $\big(T_a(f)\big)'(x)=\dfrac{1}{2\,a}\Big(f(x+a)-f(x-a)\Big)$, donc $T_a(f)$ est constante $\iff$ $\forall x\in\mathbb{R},\ f(x+a)=f(x-a)$ c'est à dire f est périodique de période $2\,a$.

3. Pour $f\in E$, $T_a(f)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, donc continue, par conséquent, $T_a(f)\in E$.
   D'autre part, soient f et g deux fonctions quelconques de E et $\lambda\in\mathbb{R}$; on a $\forall x\in\mathbb{R}$:
$$T_a(\lambda\,f+g)(x)=\frac{1}{2a}\int_{x-a}^{x+a}\Big(\lambda\,f\,(t)+g(t)\Big)\,\mathrm{d}t=\frac{\lambda}{2\,a}\int_{x-a}^{x+a}f\,(t)\ \mathrm{d}t+\frac{1}{2a}\int_{x-a}^{x+a}g(t)\,\mathrm{d}t=\lambda T_a(f)(x)+T_a(g)(x)$$
D'où : $\boxed{\forall(f,g)\in E^2,\ \forall\lambda\in\mathbb{R},\ T_a(\lambda\,f+g)=\lambda\,T_a(f)+T_a(g),\text{ donc }T_a\text{ est un endomorphisme de }E.}$

   T_a n'est pas injectif car s n'est pas la fonction nulle et $T_a(s)=0_{\mathscr{L}(E)}$. T_a n'est pas injectif car pour toute fonction f de E, $T_a(f)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$; or il existe des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ qui ne sont pas de classe $\mathscr{C}^1$, donc n'appartiennent pas à $\mathrm{Im}(T_a)$.

PROBLÈME

1. (a) $\mathcal{S}$ n'est pas vide, car la fonction nulle appartient à $\mathcal{S}$.

   Soient f et g deux fonctions quelconques de $\mathcal{S}$ et soient $\lambda\in\mathbb{R}$ et $x\in\mathbb{R}$: $x\Big(\lambda\,f+g\Big)'(x)=\lambda\,f'(x)+g'(x)$. Or $f\in\mathcal{S}$ donc $x\,f'(x)=3\,f(x)$, de même $g\in\mathcal{S}$ donc $x\,g'(x)=3\,g(x)$. On en déduit : $x\Big(\lambda\,f+g\Big)'(x)=\lambda\,x\,f'(x)+x\,g'(x)=3\Big(\lambda\,f(x)+g(x)\Big)$. Ceci est valable pour tout x réel donc $\lambda\,f+g\in\mathcal{S}$. $\mathcal{S}$ est donc un sous-espace vectoriel de l'ensemble des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

   (b) L'ensemble des fonctions solutions de l'équation différentielle sur $]0,+\infty[$ est l'ensemble des fonctions définies sur $]0,+\infty[$ par : $x\longmapsto K\,x^3$, où K est une constante réelle quelconque.

   (c) L'ensemble des fonctions solutions de l'équation différentielle sur $]-\infty,0[$ est l'ensemble des fonctions définies sur $]-\infty,0[$ par : $x\longmapsto Q\,x^3$, où Q est une constante réelle quelconque.

   (d) Soit f une solution sur $\mathbb{R}$: la restriction de f à l'intervalle $]0,+\infty[$ est de la forme $x\longmapsto K\,x^3$, où K est une constante réelle quelconque ; de même la restriction de f à $]-\infty,0[$ est de la forme $x\longmapsto Q\,x^3$, où Q est une constante réelle quelconque.
   De plus, f est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc en particulier en 0. La continuité de f en 0 entraine : $\displaystyle\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^-}f(x)=f(0)\in\mathbb{R}$. Or $\displaystyle\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^-}f(x)=0$ donc f est continue en 0 quelles que soient les valeurs de K et Q.

La dérivabilité de f en 0 se vérifie en remarquant que $\forall x > 0, f'(x) = 3\,K\,x^2$, $\forall x < 0, f'(x) = 3\,Q\,x^2$ et $\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} f'(x) = 0$.
Réciproquement, on vérifie que s'il existe des constantes réelles K et Q telles que f est définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x > 0,\ f(x) = K\,x^3$ et $\forall x \leqslant 0,\ f(x) = Q\,x^3$, alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ x\,f'(x) = 3\,f(x)$.

> Une fonction f est solution de l'équation différentielle sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $f(0) = 0$ et s'il existe deux constantes réelles K et Q telles que :
> $\forall x > 0,\ f(x) = K\,x^3,\ \ \forall x < 0,\ f(x) = Q\,x^3$

(e) La question précédente permet d'affirmer que la famille (f_+, f_-) engendre $\mathcal{S}$; montrons à présent qu'il s'agit d'une famille libre :
Soient $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\forall x \in \mathbb{R},\ \alpha\,f_+(x) + \beta\,f_-(x) = 0$.
Cette égalité est vraie en particulier pour $x = 1$: $\alpha \times 1 + \beta \times 0 = 0$, on en déduit $\alpha = 0$.
De même, l'égalité est vraie pour $x = -1$, donc $\alpha \times 0 + \beta \times (-1) = 0$, d'où $\beta = 0$.

> La famille (f_+, f_-) est libre et engendre $\mathcal{S}$, c'en est donc une base.

2. (a) Pour tout polynôme P, $3\,P$ et $X\,P$ sont des polynômes. De plus, si P est de degré inférieur ou égal à 3, alors $\deg(3\,P) \leqslant 3$, $\deg(P') \leqslant 2$, donc $\deg(X\,P') \leqslant 3$. Il s'ensuit que $\Phi(P)$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à 3.
Vérifions à présent la linéarité de Φ : Soient P et Q deux polynômes de $\mathbb{R}_3[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$: $\Phi(\lambda\,P + Q) = X\,(\lambda\,P + Q)' - 3\,(\lambda\,P + Q) = \lambda\,(X\,P' - 3\,P) + (X\,Q' - 3\,Q) = \lambda\,\Phi(P) + \Phi(Q)$.

(b) Soit $P \in \mathbb{R}_3[X]$, $P \in \ker(\Phi) \iff X\,P' = 3\,P$. On pose $P(X) = a\,X^3 + b\,X^2 + c\,X + d$, donc $P'(X) = 3\,a\,X^2 + 2\,b\,X + c$, d'où $X\,\big(3\,a\,X^2 + 2\,b\,X + c\big) = 3\,\Big(a\,X^3 + b\,X^2 + c\,X + d\Big)$, et par identification : $b = c = d = 0$; ainsi $\boxed{\ker(\Phi) = \{a\,X^3 \,/\, a \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}\big(X^3\big)}$

(c) Toujours pour $P(X) = a\,X^3 + b\,X^2 + c\,X + d$, on a $\Phi(P) = -b\,X^2 - 2\,c\,X - 3\,d \in \mathbb{R}_2[X]$, donc $\mathrm{Im}(\Phi) \subset \mathbb{R}_2[X]$. Réciproquement, soit $Q \in \mathbb{R}_2[X]$, on résout $\Phi(P) = Q$ où $P \in \mathbb{R}_3[X]$.
Posons $Q(X) = \alpha\,X^2 + \beta\,X + \gamma$, on remarque que le polynôme $P(X) = -\alpha\,X^2 - \frac{\beta}{2}\,X - \frac{\gamma}{3}$ est un antécédent de Q par Φ ; ainsi $\mathbb{R}_2[X] \subset \mathrm{Im}(\Phi)$. Q possède en fait une infinité d'antécédents par Φ, plus précisément $\Phi(P) = Q \iff \exists a \in \mathbb{R}$ tel que $P(X) = a\,X^3 - \alpha\,X^2 - \frac{\beta}{2}\,X - \frac{\gamma}{3}$

(d) Posons $Q(X) = 2\,X^2 + X - 1$, $Q \in \mathbb{R}_2[X] = \mathrm{Im}(\Phi)$ donc il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}_3[X]$ tel que $\Phi(P) = Q$; plus précisément si P_1 et P_2 sont deux polynômes de E tels que $\Phi(P_1) = \Phi(P_2) = Q$, alors $P_1 - P_2 \in \ker(\Phi)$. Soit alors P un antécédent de Q par Φ : P peut s'écrire sous la forme $P(X) = a\,X^3 + P_1(X)$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $P_1 \in \mathbb{R}_2[X]$; alors $P_1(X) = P(X) - a\,X^3 \in \mathbb{R}_2[X]$ et vérifie $\Phi(P) = Q$, car $\Phi(a\,X^3) = 0$. Tout autre antécédent de Q que P_1 est tel que $P_2 - P_1 = a\,X^3, a \in \mathbb{R}$ (puisque $P_1 - P_2 \in \ker(\Phi) = \mathrm{Vect}(X^3)$) donc est de degré 3 si $a \neq 0$. Il y a donc un unique polynôme $P_0 \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que $\Phi(P) = Q$

3. L'équation homogène associée à l'équation différentielle $x\,y' - 3\,y = 2\,x^2 + x - 1$ a été résolue à la question 1. Une solution particulière est la fonction polynômiale $p_0 : x \longmapsto -2\,x^2 - \frac{x}{2} + \frac{1}{3}$, donc d'après le principe de superposition, l'ensemble des solutions de l'équation différentielle sont les fonctions de la forme $f = \lambda\,f_+ + \mu\,f_- + p_0$.
La fonction nulle n'appartient pas à l'ensemble des solutions, donc ce n'est pas un espace vectoriel.